Universitat de Lleida

PREMIS A TREBALLS DE RECERCA DE LA UdL
per a l’estudiantat de batxillerat i cicles formatius de grau superior

Com ens connectem a les xarxes socials?

Neus Fernández Valls

Centre: Institut Ronda (Lleida)

Tutor/a: Núria Sandra Vallverdú Calderó

Tutor Itinera: Nacho López (Escola Politècnica Superior – UdL)

Data: juny, 2021

Institut Ronda

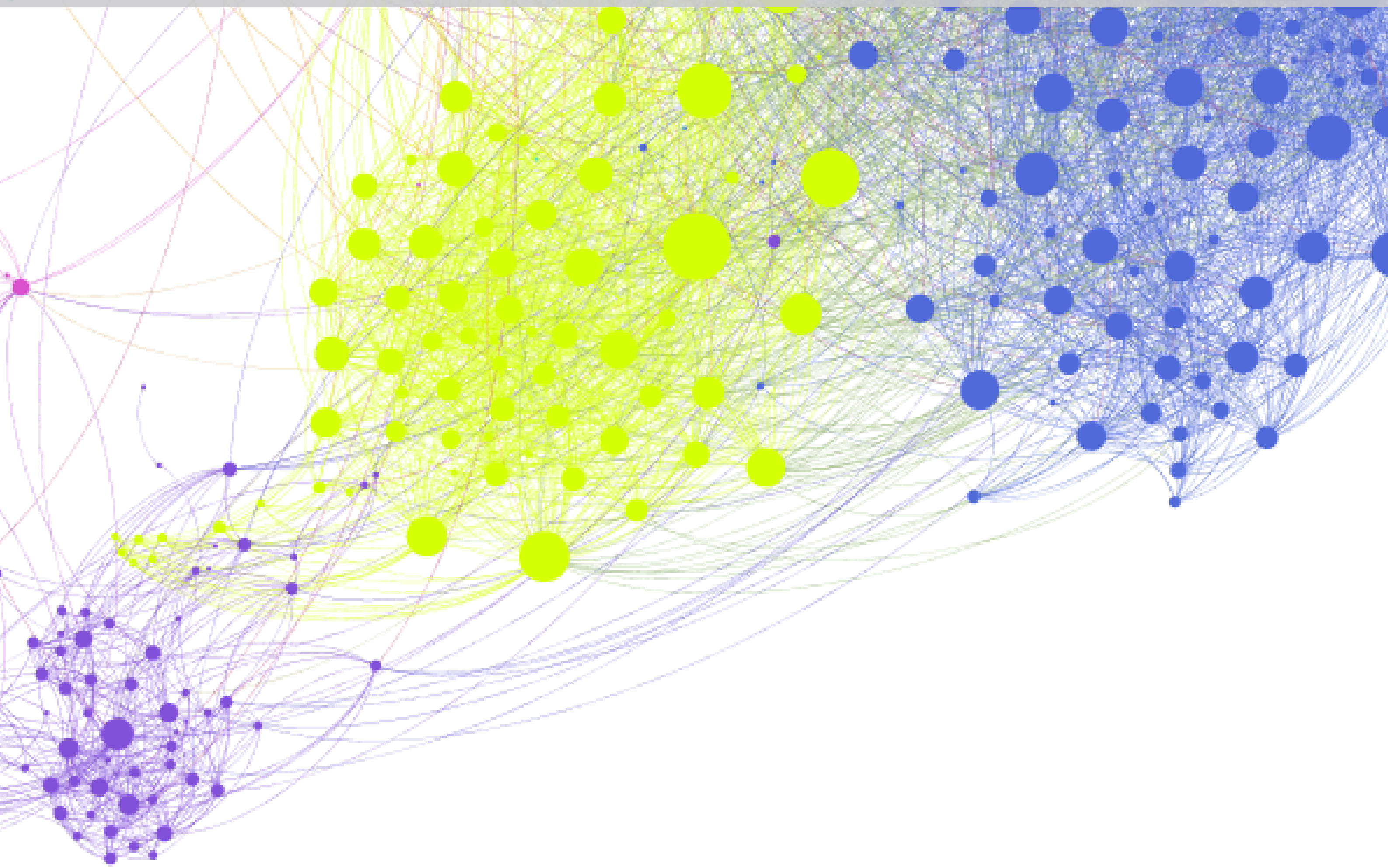
Seminari de matemàtiques

Com ens connecten les xarxes socials?

Els grafs a l’aula i a les xarxes socials

Treball de Recerca

2021



Resum

Les matemàtiques ens permeten resoldre moltes situacions i problemes que se'ns presenten al nostre dia a dia. En aquest treball de recerca ens endinsem en una branca de les matemàtiques i la informàtica: la Teoria de Grafs. Aquestes eines s'utilitzen per modelitzar i representar situacions reals en què tenim individus o entitats que podem relacionar entre ells. Els grafs ens permeten simplificar aquestes situacions complexes, estudiar-les, i analitzar comportaments per treure'n conclusions, aplicant diferents algorismes.

En aquest treball es presenten els conceptes bàsics de la Teoria de Grafs, acompanyant-los d'exemples que ens ajuden a il·lustrar-los i en faciliten la comprensió. Com a treball experimental s'han analitzat les relacions personals tant en la vida real com per les xarxes socials dels alumnes de 1r de Batxillerat de l'Institut Ronda. Per a fer-ho, s'han generat diferents grafs que representen les relacions entre tots els alumnes. Utilitzant el software de tractament de grafs Gephi s'ha fet un estudi complet d'aquests grafs, analitzant les seves característiques i comparant-los entre ells. Aquest estudi a permès extreure conclusions sobre el tipus de relacions que tenen entre ells els alumnes de les diferents classes. S'han pogut detectar grups d'amistat, el nivell de cohesió en les diferents classes del curs, a la vegada que s'han pogut detectar casos de persones poc integrades al grup. Aquesta metodologia i tractament de dades podria resultar interessant pel tutor d'un grup per extreure informació rellevant sobre el nivell d'integració i socialització de cada alumne.

Agraïments

En el desenvolupament d'aquest treball he tingut el suport i l'ajuda de diferents persones, que m'han guiat i animat a dur-lo a terme.

En primer lloc, agrair els meus tutors de TdR, la Núria Vallverdú de l'INS Ronda, i el Nacho López del Departament de Matemàtiques de la Universitat de Lleida.

D'altra banda, donar les gràcies especialment als meus companys de l'institut, que generosament han contestat tots ells l'enquesta, que ha servit de base per al meu estudi.

També agrair el projecte Itinera de la Universitat de Lleida, que ha fet possible comptar amb un tutor de la UdL, accedir als recursos bibliogràfics, i formació específica sobre els treballs de recerca.

Fer aquest treball també m'ha fet pensar en els diferents professors que m'han ensenyat durant tots aquests anys, m'han motivat per continuar aprenent i m'han preparat per fer front a reptes importants com ha estat el desenvolupament d'aquest TdR. Moltes gràcies també a tots ells.

Finalment, gràcies als meus amics i família, i molt especialment als meus pares i al meu germà. El seu suport ha estat molt important durant el temps de pandèmia i confinament en què he estat fent aquest treball, tant a nivell d'organització com de suport moral.

A tots vosaltres, moltíssimes gràcies.

Índex

Índex de figures

CAPÍTOL 1

Els grafs al nostre entorn

L'ús de la Teoria de Grafs està molt estesa per l'anàlisi de xarxes i relacions entre entitats o individus. En aquest capítol veurem una introducció a aquest camp de les matemàtiques i plantejarem el desenvolupament d'aquest Treball de Recerca.

1.1 Context

Les matemàtiques estan presents en moltes situacions del nostre dia a dia. Ens ajuden a modelitzar i representar situacions de la vida real, a simplificar situacions complexes de manera que es puguin interpretar les dades en qüestió, facilitant la resolució de determinats problemes.

Un d'aquests models matemàtics són els grafs. S'acostumen a utilitzar sempre que tenim diferents individus o entitats (que anomenarem nodes o vèrtex), i que es poden relacionar entre ells d'alguna manera, segons un cert criteri (aquests enllaços s'anomenen arestes). Per exemple podríem representar un conjunt de persones a Facebook, que estarien relacionades sempre i quan siguin amigues entre elles. Però a més a més de representar relacions entre persones, els grafs també permeten representar altres situacions: una xarxa d'ordinadors, de pàgines web, un mapa de carreteres o de vies de tren...

El primer que va plantejar representar la realitat d'aquesta manera va ser Leonhard Euler (1707-1783). Euler es va fascinar per un joc al qual jugaven els habitants de Königsberg. Per aquesta ciutat hi creuava un riu, en què hi havia dues illes que estaven connectades amb ponts, tant entre elles com amb tots dos costats del riu tal com podem veure a la Figura 1.1.

Els habitants de Königsberg intentaven recòrrer la ciutat creuant els set ponts sense repetir-ne cap. Ningú aconseguia trobar una solució al problema, però tampoc podien demostrar que era impossible. Euler va crear un mètode per resoldre aquest problema, simplificant el mapa de la ciutat utilitzant un graf en què cada zona de la ciutat es va representar com un node i els ponts establien les relacions entre dos nodes contigus. Com podem veure en la Figura 1.2 tenim una simplificació del mapa

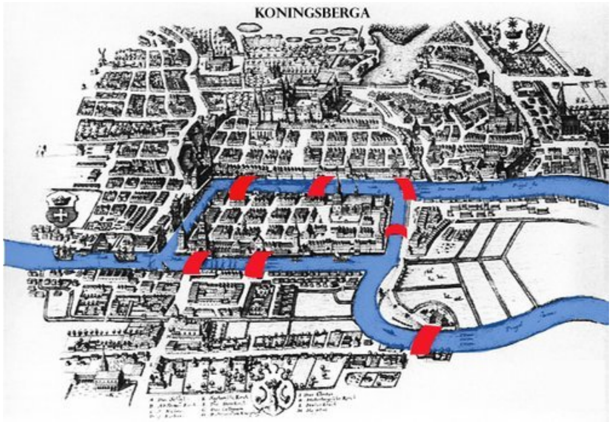


Figura 1.1: Mapa de Königsberg

de la ciutat que ja ens permet analitzar millor el problema; a la Figura 1.3 veiem el graf que modelitza la situació del joc. En aquest cas, el joc dels ponts es transforma en el típic problema de fer el dibuix del graf sense aixecar el llapis del paper i sense passar dues vegades pel mateix lloc. El problema dels ponts de Königsberg resulta ser impossible de resoldre, explicació del qual farem més endavant (veure Secció 2.6). Aquest problema va ser el naixement de la Teoria de Grafs i des del segle XVIII ha constituït una branca molt important de les matemàtiques.

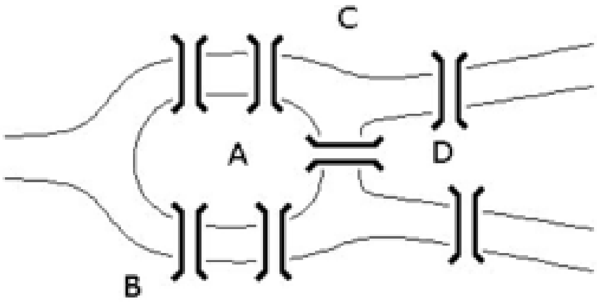


Figura 1.2: Simplificació mapa de Königsberg

De la mateixa manera que Euler va representar el joc dels ponts de Königsberg, les situacions que podem representar mitjançant grafs no paren de crèixer. Aquestes representacions ens permeten respondre a preguntes com: quina és la ruta més curta per arribar a un lloc determinat? Quines opcions de ruta hi ha? Quina persona, pàgina web, etc. és més popular entre un grup de persones? Existeix o no una solució a un determinat problema? (Com en l'exemple dels ponts de Königsberg). A més a més, actualment podem veure molts grafs representant les xarxes socials que ens mostren les relacions virtuals entre persones. D'aquí es pot extreure moltíssima informació, crear propostes de màrqueting per influenciar al màxim de persones a

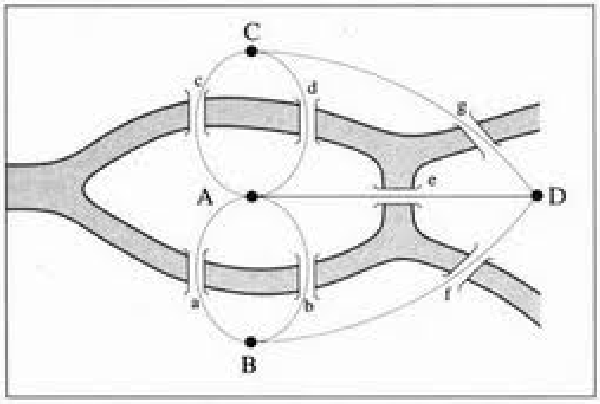


Figura 1.3: Graf mapa de Königsberg

l'hora de vendre un producte, estudiar la persona que influencia més a un determinat grup d'individus, veure com influencia aquesta gent en les persones que la segueixen, etc.

1.2 Desenvolupament del treball

L'objectiu d'aquest treball és aplicar els conceptes de la Teoria de Grafs per estudiar el comportament de les relacions personals entre els alumnes de primer de batxillerat de l'INS Ronda, i comparar aquestes relacions, amb les que tenen per les xarxes socials, concretament, Instagram.

Per poder desenvolupar el treball, es va començar recollint informació sobre el tema, i estudiant els conceptes bàsics de la Teoria de Grafs. Es van utilitzar recursos bibliogràfics de la biblioteca de la Universitat de Lleida, pàgines web, i vídeos de YouTube divulgatius que parlaven del tema de manera entenedora per poder introduir-se en aquest camp. Aquest treball s'ha desenvolupat dins del Projecte Itinera de la Universitat de Lleida, que ha permès comptar amb un tutor de la universitat, així com accedir al fons bibliogràfic i cursos de formació específics.

Un cop entesos i estudiats els conceptes principals, es van buscar altres estudis en què s'havia utilitzat aquest camp de les matemàtiques per estudiar problemes interessants. A partir d'aquests articles es van acabar d'estudiar algunes mesures a calcular en xarxes o grafs, i que ens permeten extreure'n informació.

Per poder desenvolupar la part experimental del treball, primer de tot es va haver d'aprendre a utilitzar alguns *softwares* que veurem a l'Apèndix A. Finalment, es va dur a terme l'experimentació, es va fer la recollida de dades i el tractament d'aquestes, per poder crear grafs i estudiar-los.

Aquest estudi ha permès arribar a diferents conclusions, com per exemple veure les persones més populars al curs, estudiar el nivell de cohesió de les diferents classes del curs i comparar-les entre elles així com comparar les relacions personals amb les relacions per Instagram.

1.3 Estructura de la memòria

En aquest treball parlarem de la Teoria de Grafs aplicada a les relacions personals entre els alumnes de 1r de batxillerat, i veurem com aquestes relacions es poden veure reflectides d'una certa manera en les xarxes socials.

En el Capítol 2, es farà una introducció als conceptes bàsics de Teoria de Grafs. La teoria s'acompanyarà d'exemples de situacions reals on podem aplicar aquests conceptes. Al Capítol 3, veurem com utilitzant Teoria de Grafs s'han estudiat problemes reals, es presentaran algunes mesures que permeten calcular altres paràmetres d'una xarxa o graf i que ens seran útils per la part experimental. Al Capítol 4 presentarem l'experimentació del treball. Veurem en primer lloc el plantejament i els objectius, i tot seguit, el desenvolupament. En aquest capítol veurem el tractament i anàlisi dels grafs que s'han creat per fer la part experimental del treball, i treurem conclusions un cop haguem comparat i estudiat tots els grafs. Al Capítol 5 hi podem trobar un resum d'aquestes conclusions i els objectius assolits.

Aquest treball també conté dos apèndixs amb informació complementària. A l'Apèndix A, veurem el software que s'ha utilitzat per fer el treball amb petites explicacions, i també alguns recursos que han estat útils pel seu desenvolupament. L'Apèndix B parla exclusivament del software de tractament de grafs, Gephi [Gep], que s'ha utilitzat en la part experimental per estudiar i analitzar els grafs.

CAPÍTOL 2

Conceptes bàsics de grafs

Ara que tenim una idea general sobre què són els grafs, quines situacions modelitzen i quan es poden utilitzar, aprofundirem una mica més. Veurem definicions formals, propietats dels grafs, exemples de tipus de grafs singulars... Ho acompanyarem amb exemples que facin més entenedores les explicacions.

Per estudiar i preparar aquest capítol he consultat, principalment, els següents llibres: [AW00; Gim+98; Ore95]. El primer és un llibre més teòric, i amb definicions molt acurades i formals. El segon és més divulgatiu, relaciona molt les explicacions amb exemples i aplicacions. El tercer és un llibre en anglès, que combina els dos aspectes (teòric i aplicat) amb explicacions i definicions molt entenedores acompanyades d'exemples.

També he consultat webs i vídeos que m'han ajudat a entendre millor i complementar les explicacions dels llibres. Aquests recursos estan comentats en l'Annex A.

2.1 Característiques dels grafs

Els grafs estan formats per un conjunt de vèrtex o nodes, units entre ells per arestes; representen els elements d'una situació real, simplificant-ne la interpretació. Més formalment podem dir:

Definició. Un graf $G = (V, A)$ esta format per un conjunt de vèrtex V i per un conjunt d'arestes A. Cada aresta uneix dos vèrtex.

Notació. Si tenim el conjunt de vèrtexs $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i els vèrtexs v_i i v_j estan units per una aresta, direm que són adjacents, $v_i \sim v_j$. Aquesta aresta la podem denotar per $v_i v_j \in A$. Aquesta aresta és incident als vèrtexs v_i i v_j.

Exemple. Podem representar amb un graf els equips i partits jugats d'una lliga de futbol a meitat de temporada. Considerarem 6 equips: a, b, c, d, e, f. Per representar el graf d'aquesta situació, els equips de futbol seran els vèrtexs, i dos vèrtexs estaran relacionats entre si quan els equips que representin hagin jugat entre ells en el temps que porten de lliga. El graf que representa aquesta situació seria com el que veiem en la Figura 2.1.

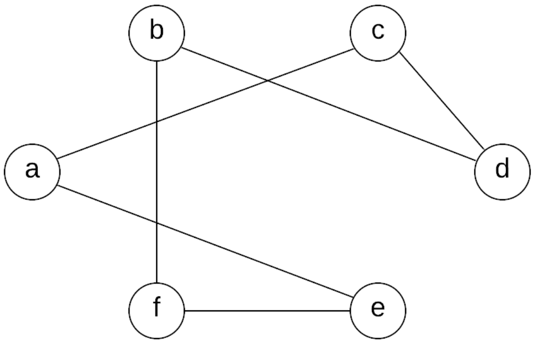


Figura 2.1: Graf dels partits de futbol jugats

En el cas representat a la Figura 2.1:
a haurà jugat amb c i e
b haurà jugat amb d i f
c haurà jugat amb a i d
d haurà jugat amb c i b
e haurà jugat amb a i f
f haurà jugat amb b i e
L'aresta que uneix els nodes a i c la denotem per ac. Així doncs, en aquest graf tenim:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\},$$
$$A = \{ac, ae, bd, bf, cd, ef\}$$

En qualsevol graf podem fer un recompte de vèrtexs i arestes totals.

Definició. L'*ordre* d'un graf $G = (V, A)$ és el nombre de vèrtexs de G, és a dir, el cardinal de V, $|V|$. La mida de G és el nombre d'arestes de G, és a dir, el cardinal de A, $|A|$.

Per tant en el graf de la Figura 2.1 tenim:

$$\text{ordre} = |V| = 6,$$
$$\text{mida} = |A| = 6$$

D'altra banda, també podem comptar el número d'arestes que surten d'un vèrtex, que anomenarem *grau*.

Definició. El *grau* d'un vèrtex v en un graf $G = (V, A)$, que denotarem per $g(v)$, és el nombre d'arestes de G incidents amb v.

En el cas del graf de la lliga de futbol que hem posat d'exemple, tots els vèrtexs tindran el mateix grau: 2. Partint del supòsit que en cada ronda de la lliga, cada equip juga contra un altre equip; en la Figura 2.1 s'ha acabat la segona ronda i per tant cada equip ha jugat contra dos altres. D'acord amb la Figura 2.1, el vèrtex a té dos arestes incidents en ell, ac i ae, per tant direm:

$$g(a) = 2$$

Exemple. Ara considerarem un cas en què la lliga estigui una mica més avançada, com en la situació representada al graf de la Figura 2.2.

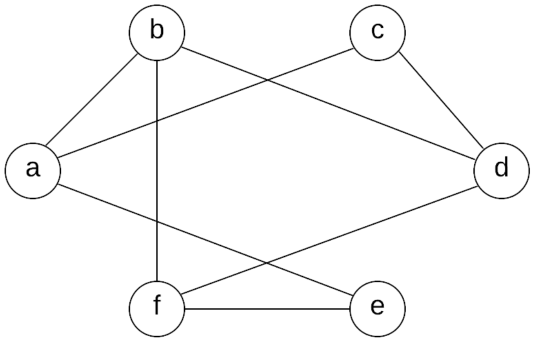


Figura 2.2: Graf dels partits de futbol jugats

En aquest cas tindríem que:

$$\begin{aligned}
&|V| = 6,\\
&|A| = 8,\\
&g(a) = g(b) = g(d) = g(f) = 3,\\
&g(c) = g(e) = 2
\end{aligned}$$

El número d'equips no ha canviat, per tant l'*ordre* segueix tenint el mateix valor; la *mida* ha augmentat ja que s'han jugat dos partits més que en la situació anterior. Per tant en aquest darrer exemple, estan fent la tercera ronda de la lliga. Quatre equips ja han jugat el tercer partit (que són els vèrtexs que tenen grau 3), però a dos equips encara els queda jugar-ne un per acabar la 3a ronda (els vèrtexs que tenen grau 2).

2.2 Teorema de les encaixades de mans

A l'hora d'estudiar els grafs, podem estar interessats en comptar el número total d'arestes que té, és a dir, trobar-ne la *mida*. Això pot resultar fàcil en grafs senzills com els que hem vist anteriorment, però es complica quan tenim grafs amb molts vèrtexs i arestes. En un graf qualsevol, si comptem les arestes que surten de cada vèrtex i les sumem totes, veurem que hem comptat cada aresta dues vegades ja que aquesta és incident en dos vèrtexs. D'aquí surt el Teorema de les Encaixades de Mans.

Teorema. *En qualsevol graf $G = (V, A)$, la suma dels graus de tots els vèrtexs és igual al doble del número d'arestes.*

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$$

El nom que rep aquest teorema s'entén fàcilment a partir del següent exemple. Podem representar amb un graf un grup de persones en una reunió que es saluden entre elles encaixant les mans, com veiem en la Figura 2.3.

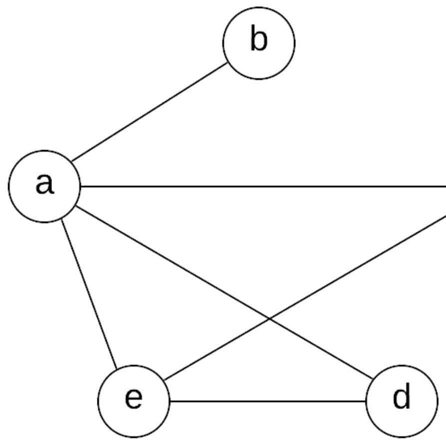


Figura 2.3: Representació de les encaixades de mans en una reunió de 5 persones

Els vèrtexs dels grafs representen les persones que assisteixen a la reunió, una aresta les relaciona si han encaixat les mans. D'aquesta manera, la mida del graf seria les encaixades de mans totals al llarg de la reunió; el grau de cada vèrtex seria el nombre de persones a les que ha saludat cada persona; i la suma dels graus de tots els vèrtexs seria el múmero de mans que han fet una encaixada.

Tal com diu el teorema de les encaixades de mans, la suma de les mans que s'encaixen durant la reunió són el doble d'encaixades de mans totals que s'han fet. Això és degut a que en cada encaixada de mans hi ha dues mans que hi participen. Per tant si vulguessim calcular la mida del graf tindriem:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$$

$$4 + 1 + 2 + 2 + 3 = 2|A|$$

$$|A| = 12/2$$

$$|A| = 6$$

A més a més, a partir d'aquest teorema podem afirmar que la suma dels graus dels vèrtexs d'un graf sempre serà un número parell ja que és igual al doble de la mida. També podem deduir que tot graf té un número parell de vèrtexs amb grau imparell ja que sinó al fer la suma dels graus dels vèrtexs ens donaria un número imparell i seria impossible que fos igual al doble de la mida.

2.3 Subgrafs

En el camp de les matemàtiques, per a fer estudis molt grans, sovint s'estudien primer parts més petites d'aquest estudi. A l'hora d'estudiar un graf, també podem centrar-nos en una petita part, que anomenarem *subgraf*.

Definició. El subgraf d'un graf G és un graf els vèrtexs del qual també són vèrtexs de G i les arestes del qual també són arestes de G.

Exemple. Agafant l'exemple de la reunió de 5 persones i les encaixades de mans que fan entre elles, Figura 2.3, en comptes d'estudiar el conjunt complet d'encaixades de mans totals, podem centrar-nos tan sols en les encaixades que ha fet la persona a. Aquesta informació la podem representar com a un subgraf del graf del primer graf.

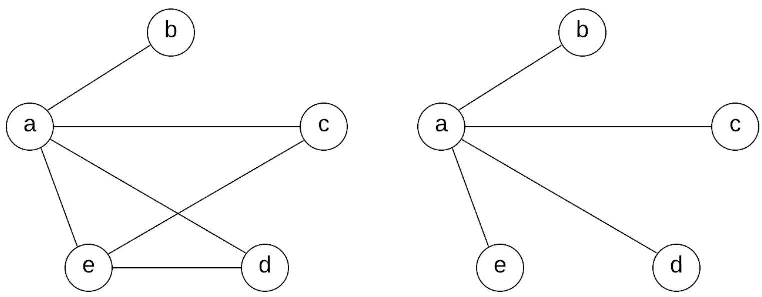


Figura 2.4: Graf que representa les encaixades de mans i un subgraf seu

Com veiem a la Figura 2.4, el graf de la dreta és un subgraf del graf de l'esquerra, al que anomenarem G. Ho podem afirmar ja que tots els vèrtexs que té, també són vèrtexs de G, i podem dir el mateix de les seves arestes. Això és així ja que les persones a les quals ha saludat la persona a durant la reunió (representat al subgraf de G), també estan representades en el graf G, que ens mostra les salutacions que fan tots els individus.

Podríem representar molts subgrafs a partir del graf G segons els paràmetres que volem estudiar i la informació que ens interessa analitzar. Per exemple si representem el graf que relaciona les persones a, e i d, podem veure que totes tres es coneixen ja que han encaixat les mans (veure Figura 2.5).

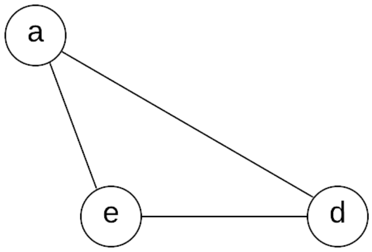


Figura 2.5: Subgraf del graf G

2.4 Exemples importants de grafs

Hi ha alguns grafs, que per la seva forma i característiques reben un nom particular. En aquesta secció parlarem una mica d'alguns d'aquests exemples importants i de les seves peculiaritats.

Definició. El *graf nul*, que denotarem per N_n, és un graf que té n vèrtexs i cap aresta.

Exemple. Relacionant-ho amb el mateix exemple que hem posat sobre la lliga de futbol (Secció 2.1), podem representar un graf abans de que comenci la lliga. Com que encara no s'haurà jugat cap partit, no hi haurà arestes que incideixin en cap vèrtex i per tant el graf que representarà la situació serà nul, al que anomenarem N_6, ja que hi ha 6 equips. (Figura 2.6)

Podem veure que en el cas del graf nul tenim n vèrtexs, tots de grau 0, i per tant la mida del graf és 0.

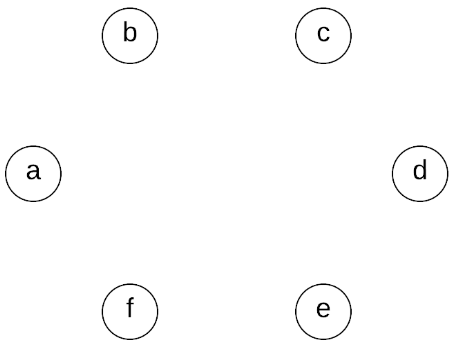


Figura 2.6: Graf nul

Definició. El *graf complet*, que denotarem per K_n, és un graf que té n vèrtexs i cada vèrtex és adjacent a tots els altres.

Exemple. Si volem representar un graf de la lliga de futbol un cop s'ha acabat la temporada i tots els equips han jugat una vegada contra tots els altres, utilitzarem un graf complet, K_6. En aquest graf hi haurà 6 equips i les arestes els relacionaran tots amb tots.

En el cas del graf complet que té n vèrtexs, el grau de cada vèrtex sempre serà $n-1$, ja que tindrà una aresta per cada altre vèrtex del graf. Partint d'aquí i relacionant-ho amb el teorema de les encaixades de mans podem trobar quina és la seva mida:

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$$

$$n(n-1) = 2|A|$$

$$|A| = \frac{n(n-1)}{2}$$

En el cas que hem posat d'exemple tenim que:

$$n = 6,$$

$$|A| = \frac{6(6-1)}{2},$$

$$|A| = 30/2,$$

$$|A| = 15$$

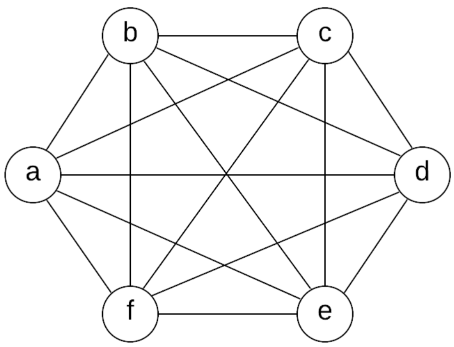


Figura 2.7: Graf complet de 6 vèrtexs

Definició. El *graf cicle*, que denotarem per C_n, té n vèrtexs, $V = \{v_1, ..., v_n\}$, i complirà que sempre $v_i \sim v_{i+1}$ i $v_1 \sim v_n$.

Observem que els vèrtexs del graf cicle sempre tindran grau 2. Podem veure un exemple del graf cicle en la Figura 2.8. És fàcil veure utilitzant el teorema de les encaixades de mans que és un graf d'ordre n i mida n; té tantes arestes com vèrtexs.

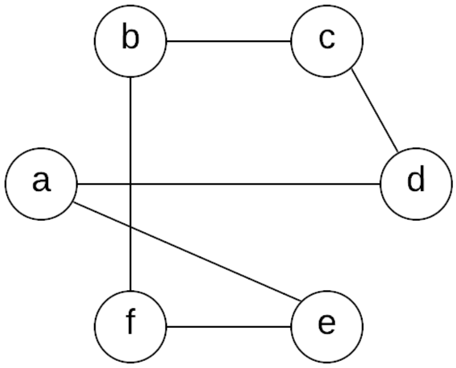


Figura 2.8: Graf cicle

2.5 Tipus de grafs

A més a més d'aquests exemples de grafs especials, tot graf pot tenir determinades característiques segons les quals podem classificar els grafs.

Definició. Els *grafs regulars* són aquells que tenen el mateix grau en tots els vèrtexs. Un graf serà *d-regular* quan els seus vèrtexs tinguin grau *d*.

Si mirem els exemples que hem posat a la secció anterior, podem comprobar que el graf nul, el graf complet, i el graf cicle són tots grafs regulars.

En la Figura 2.9 tenim representat un graf *3-regular*. A més a més, aquest graf seria complet ja que cada vèrtex del graf és adjacent a tots els altres.

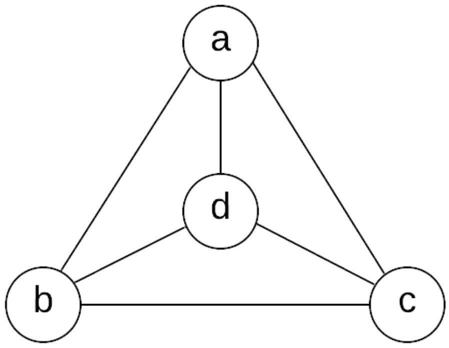


Figura 2.9: Graf regular

Definició. Un graf és *bipartit* si el seu conjunt de vèrtexs pot dividir-se en dos subconjunts V_1 i V_2 de manera que qualsevol aresta del graf uneixi un vèrtex de V_1 i un de V_2.

Exemple. Un graf bipartit podria representar les sol·licituds dels alumnes als diferents departaments o seminaris de l'institut per fer el TdR. Un subconjunt dels vèrtexs representaria els alumnes, i l'altre representaria els departaments o seminaris (matemàtiques, llengua, ciències experimentals, música...). A la Figura 2.10 hi ha 10 alumnes i 4 seminaris. Els vèrtexs blancs, que representen els alumnes, estaran relacionats amb els vèrtexs negres, que són els diferents departaments, quan un alumne hagi demanat un determinat seminari. Posant per cas que cada alumne pot sol·licitar un màxim de dos seminaris, els vèrtexs blancs podran tenir grau 2 com a màxim i podrem estudiar quin seminari és el més sol·licitat

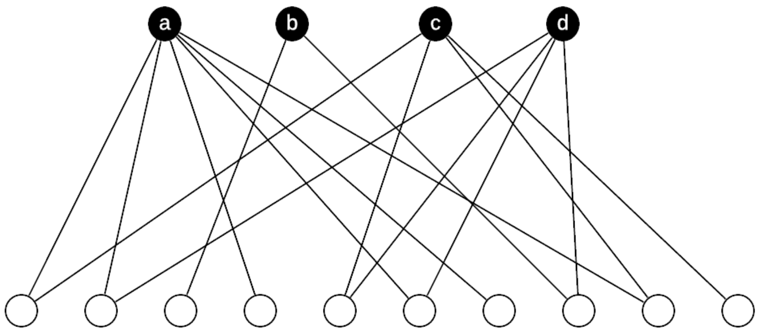


Figura 2.10: Graf bipartit

El departament més popular entre els alumnes és el a, seguit del c i el d. El seminari menys sol · licitat és el b amb tan sols dues sol · licituds.

Definició. Un graf és *pla* quan es pot representar de manera que cap de les seves arestes es creui amb una altra.

Exemple. Podem veure aplicacions dels grafs plans en la vida real. En electrònica, podem observar un diagrama d'un circuit elèctric com un graf. Les arestes d'aquest graf serien els cables que relacionen entre si les interseccions del circuit, i aquestes interseccions serien els nodes. A l'hora d'imprimir un circuit elèctric, aquest circuit ha de poder representar-se amb un graf pla. Si no fos així i dos cables es creuessin, el circuit curtcircuitaria. Podem veure a la Figura 2.11 un exemple d'un cas com aquest.

2.6 Grafs eulerians i hamiltonians

En aquesta secció veurem dos tipus de grafs molt importants, els grafs eulerians i hamiltonians, anomenats així en honor als matemàtics Leonhard Euler i William Rowan Hamilton, que els van estudiar.

Definició. Un graf és eulerià si té un recorregut tancat que conté totes les arestes del graf. Aquest tipus de recorregut s'anomena circuit eulerià.

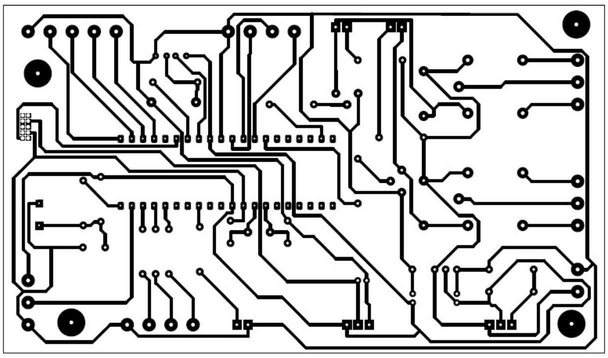


Figura 2.11: Graf pla: circuit elèctric

Així doncs, si un graf és eulerià, podem repassar el graf amb un llapis sense aixecar la punta, passant per totes les arestes i començant i acabant en el mateix vèrtex. Per a què hi hagi un circuit eulerià, veiem que s'ha d'entrar i sortir el mateix nombre de vegades a cada vèrtex, per tant els graus de tots els vèrtexs han de ser parells. En un circuit eulerià, es pot passar tantes vegades com calgui per un vèrtex, però no es poden repetir arestes.

Ja hem parlat de Leonhard Euler al Capítol 1 per explicar l'origen dels grafs: el joc de creuar tots els ponts de la ciutat de Königsberg sense passar dues vegades pel mateix pont. Ara que hem vist una característica necessària per a què un graf sigui eulerià, podem veure que no hi ha cap recorregut que resolgui el problema dels ponts de Königsberg. Com veiem a la Figura 2.12 el graf que modelitza la situació del joc té quatre vèrtexs de grau imparell. Així va ser com Euler va demostrar que era impossible dibuixar aquest graf d'una sola traçada, i per tant els habitants de Königsberg van saber que no calia seguir buscant solució a un problema que no la tenia.

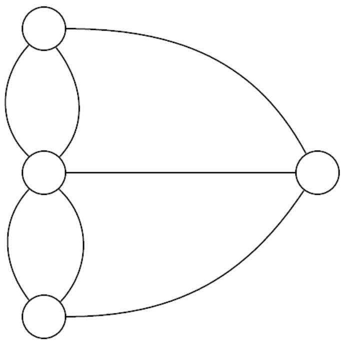


Figura 2.12: Graf eulerià: ponts de Königsberg

Un altre problema que es pot modelitzar amb els grafs eulerians és el problema de l'explorador. Si considerem un mapa de carreteres com el de la Figura 2.13 en el qual els vèrtexs són ciutats i les arestes són carreteres, hi hauria una ruta que permetés passar per totes les carreteres sense repetir-ne cap i que surti i acabi a la mateixa ciutat?

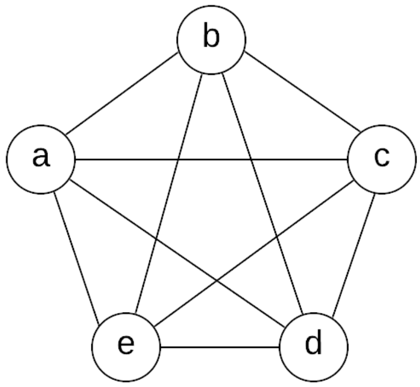


Figura 2.13: Graf eulerià: mapa de carreteres i ciutats

La resposta és que sí ja que és un graf eulerià. Una solució del problema seria la ruta *acebdabcdea*.

Definició. Un graf és hamiltonià si té un cicle que conté tots els vèrtexs del graf. Aquest tipus de cicle s'anomena cicle hamiltonià.

Mentre que en el cas dels grafs eulerians havíem de buscar una ruta que passés per totes les arestes, en els grafs hamiltonians cal trobar una ruta que passi per tots els vèrtexs sense repetir-ne cap, però no necessàriament per totes les arestes. Per veure si un graf és eulerià només cal fixar-se en els graus dels vèrtexs i veure si són parells; en canvi els grafs hamiltonians costen molt més d'identificar, i els matemàtics encara no han trobat un criteri senzill per decidir si un graf és hamiltonià o no, i si el número d'arestes és molt gran, el problema no es pot resoldre ni amb l'ordinador més potent del món.

Si tornem a mirar la Figura 2.13 podem plantejar un altre problema molt famós, aquest cop relacionat amb els grafs hamiltonians, anomenat el problema del viatjant de comerç. Hi hauria alguna ruta que ens permetés passar per totes les ciutats sense repetir-ne cap i començant i acabant a la mateixa ciutat? La solució d'aquest problema en aquest exemple és que sí, ja que es tracta d'un graf hamiltonià. Serien rutes solució *abcdea* o *acebda*.

2.7 Arbres

En aquesta secció ens centrarem en un tipus de graf molt important, que s'utilitza en molts àmbits: els arbres.

Definició. Un graf és connex si hi ha un camí que uneix cada vèrtex del graf amb qualsevol dels altres.

Definició. Un arbre és un graf connex que no té cicles.

Així doncs, dos vèrtexs d'un arbre estaran relacionats entre si per un sol camí. Per tant si traiem qualsevol aresta de l'arbre, el graf es desconnecta i deixa de ser un arbre.

En qualsevol arbre, les arestes i vèrtexs surten a partir d'un vèrtex inicial al que anomenarem arrel. A partir d'aquest poden sortir altres arestes que portin a altres vèrtexs, d'aquests tornaran a sortir-ne més, i així successivament fins completar l'arbre. Per tant podríem utilitzar arbres per representar qualsevol procés d'ordenació, per exemple la distribució de cartes postals que surten d'una ciutat (primer les classifiquem segons la província de destí, després segons la població, després segons el barri...) o el sistema de canonades que distribueixen l'aigua en una ciutat.

Abans de començar a construir un arbre, tenim tan sols un vèrtex, l'arrel. Per fer l'arbre anirem afegint arestes i vèrtexs a partir de l'arrel, per tant cada vèrtex que vulguem afegir, estarà connectat a un altre per una sola aresta. D'aquesta manera, podem afirmar que un arbre amb n vèrtexs tindrà $n-1$ arestes.

Exemple. Els arbres tenen moltes aplicacions en el camp de la informàtica, per exemple podem representar l'estructura de fitxers en un ordinador. El vèrtex d'on surten les arestes i tots els altres vèrtexs seria el disc dur, en aquest cas l'arrel de l'arbre. A partir d'aquest penjarien altres carpetes, i dins d'aquestes n'hi hauria altres. En aquest arbre les arestes representarien que podem passar d'una carpeta a l'altra, és a dir que una està dins de l'altra. Podem veure un arbre que representa l'estructura dels fitxers en un ordinador a la Figura 2.14.

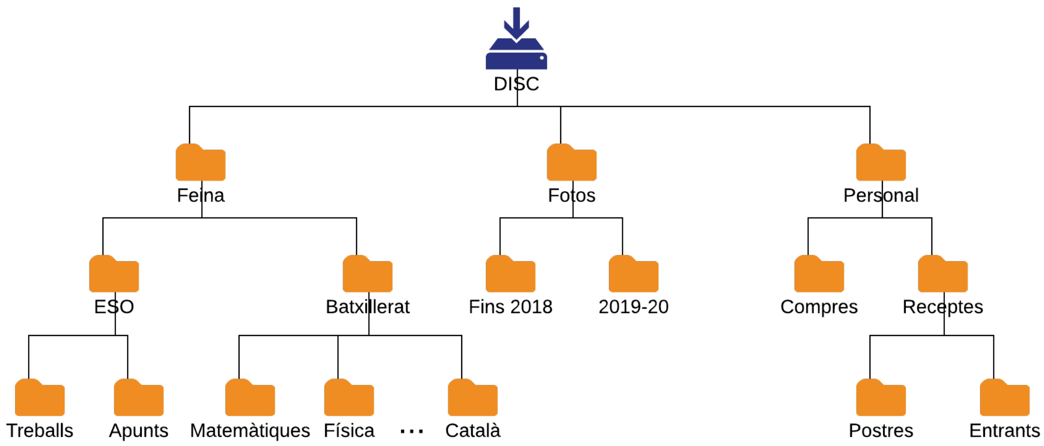


Figura 2.14: Arbre: estructura de fitxers en un ordinador

Exemple. Relacionant els arbres amb la situació de pandèmia pel COVID-19, podem representar amb un arbre els contagis de coronavirus a partir del primer infectat. Els vèrtexs seran les persones, i el grau de cada vèrtex tindrà a veure amb la capacitat d'infectar que té cada individu, en relació a la seva vida social i el contacte amb les altres persones. En l'article [WM20] publicat a la revista digital "The Spinoff", reflexionen sobre l'aïllament social durant la pandèmia COVID-19. Representen algunes de les seves idees amb la Figura 2.15. En el primer arbre veiem l'expansió potencial del virus sense que es prengui cap mesura de distanciament social, veiem com l'expansió del coronavirus és molt ràpida i com en pocs dies el número d'infectats creix exponencialment. En el segon arbre ens mostra una situació en la qual ràpidament s'imposen mesures de distanciament social i ens ajuda a veure l'efecte del confinament quan el virus encara no està molt expandit i la importància d'actuar aviat (en els nodes més propers a l'arrel). Podem veure al segon arbre de la Figura 2.15 com el fet de confinar una sola persona en els estadis inicials ajuda a controlar el contagi del virus.

2.8 Digrafs

A partir del concepte de graf que hem explicat anteriorment, podem introduir el concepte de digraf o graf dirigit, en què a més a més d'haver-hi arestes, tenim en compte la seva orientació. En els casos que per modelitzar una situació és important tenir en compte l'ordre o sentit de la relació entre els vèrtexs, un digraf ens ajuda a representar-ho millor que un graf.

Definició. Un digraf està format per un conjunt de vèrtexs i un conjunt d'arcs. Cada arc uneix dos vèrtex en una direcció determinada.

Notació. Quan un arc va d'un vèrtex a a un altre vèrtex b, aquest arc el denotarem per ab, que ens indica la direcció d'aquest. A diferència de les arestes en els grafs, l'arc ab d'un digraf no serà el mateix que l'arc ba.

Pel que fa al grau dels vèrtexs en un digraf, podem distingir el grau de sortida i el grau d'entrada.

Definició. El grau de sortida d'un vèrtex v, que denotarem per $g^+(v)$, és el nombre d'arcs que surten de v. El grau d'entrada d'aquest vèrtex, que denotarem per $g^-(v)$, és el nombre d'arcs que entren a v.

Exemple. Podem representar un mapa d'una ciutat en què veiem 6 monuments o llocs importants (vèrtexs), i avingudes que els relacionen entre si (arcs). Aquestes avingudes poden ser d'un únic sentit o de doble sentit, i aquesta informació ens la donaran els arcs. Podem veure el digraf que representa la situació en la Figura 2.16.

A partir d'aquest digraf calcularem la suma dels graus de sortida i dels graus d'entrada:

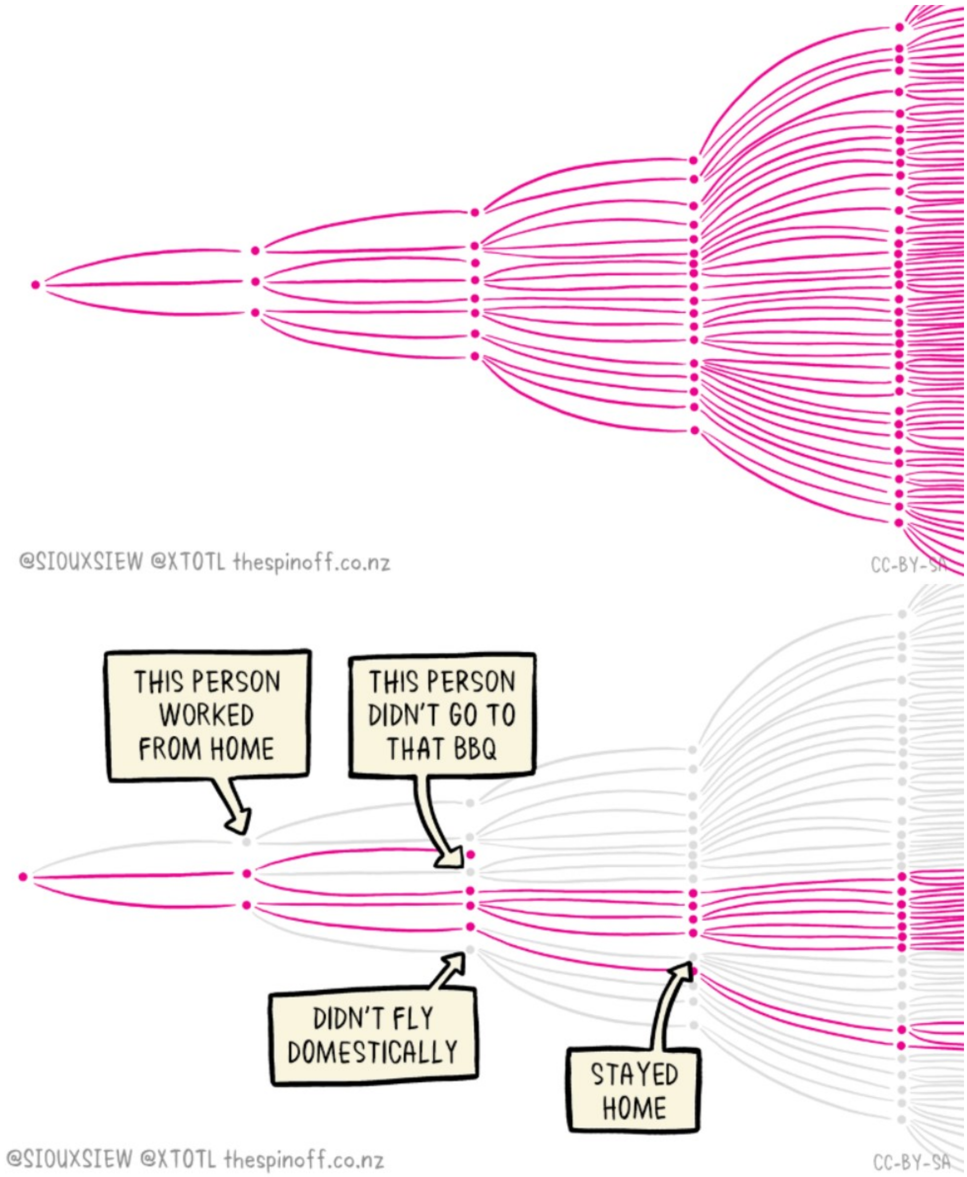


Figura 2.15: Arbre representant la situació del coronavirus

$$\sum g^+(v) = 1 + 3 + 3 + 1 + 2 + 1 = 11$$
$$\sum g^-(v) = 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 2 = 11$$

Si comptem els arcs totals del digraf, veiem que també n'hi ha 11. Adonem-nos que, en general, cada arc té dues puntes, una contribueix a la suma dels graus de sortida i l'altra a la suma dels graus d'entrada. Per tant la suma de tots els graus de sortida serà igual als arcs totals, i també serà igual a la suma dels graus d'entrada. Aquest raonament és la demostració del següent teorema, que és l'equivalent al

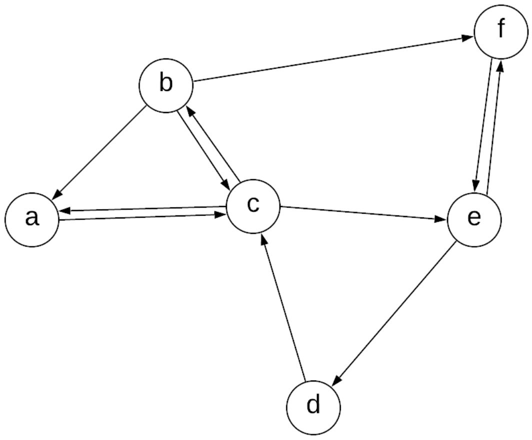


Figura 2.16: Digraf: monuments i avingudes

teorema de les encaixades de mans però per digrafs.

Teorema. *En qualsevol digraf, la suma dels graus de sortida i la suma dels graus d'entrada ens donen el número total d'arcs.*

Exemple. Un altre exemple de situació real que es pot modelitzar amb un digraf seria la següent: considerem un grup d'amics que juguen a l'amic invisible. Tindrem 6 vèrtexs que seran els amics, i de cada vèrtex sortirà un arc que representa que un amic li dona un regal a un altre. Observem la Figura 2.17.

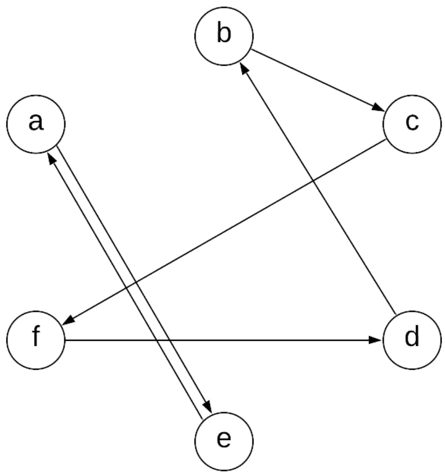


Figura 2.17: Digraf: amic invisible entre amics

En aquest exemple veiem com a l'hora de fer l'assignació d'amics a l'atzar, s'han generat dos subdigrafs cicle. Observem que aquest digraf no és connex.

CAPÍTOL 3

Els grafs i les seves aplicacions

Com hem vist al Capítol 2, els grafs permeten analitzar i simplificar situacions reals, i fer de problemes que a simple vista poden semblar molt complicats, problemes més fàcils de resoldre. En aquest capítol veurem algunes situacions reals que s'han estudiat utilitzant grafs i com s'utilitzen alguns paràmetres per analitzar-los.

3.1 Els grafs i la famosa sèrie Joc de Trons

Al veure una sèrie tan complexa i amb tants personatges com és Joc de Trons, ens podem preguntar: qui és realment el protagonista de la sèrie? Un estudi fet per un alumne i un professor de matemàtiques de la Universitat de Macalester d'Estats Units [BS16], utilitza els grafs per estudiar la connexió entre tots els personatges i en treu conclusions. Aquest estudi el van fer sobre el tercer llibre de la saga ja que d'aquesta manera es veuen les relacions de manera més acurada, però les conclusions de l'estudi es poden portar també a la mateixa sèrie televisiva.

Per representar la relació entre tots els personatges, creen un graf mitjançant programes informàtics (veure la Figura 3.1) en què hi ha 107 vèrtexs, representant cadascun dels personatges, i hi ha arestes (un total de 353) unint-los si tenen algun tipus de relació, ja bé sigui d'amistat, que parlin l'un de l'altre en algun moment de la sèrie, o fins i tot si són mencionats conjuntament. Aquestes arestes tenen pes: depenent de com de forta és la relació i les vegades que interactuen dos personatges, l'aresta que els uneix és més o menys gruixuda (de fet, a cada aresta se li assigna un valor i el gruix va en funció d'aquest pes).

Veiem també com apareixen diversos colors en el graf. Aquests colors corresponen a les comunitats, i el color del vèrtex de cada personatge ens indica la comunitat a la que pertany. Hi ha set colors i per tant set comunitats: els Lannisters i King's Landing, el Robb i el seu exèrcit, el Bran i el seu entorn, Arya i companyia, Jon Snow i els personatges del nord, les forces de Stannis, i la Daenerys i els personatges d'Essos. Per diferenciar aquestes set comunitats han utilitzat una mesura que s'anomena modularitat, que permet dividir una xarxa o un graf en diversos mòduls en funció de

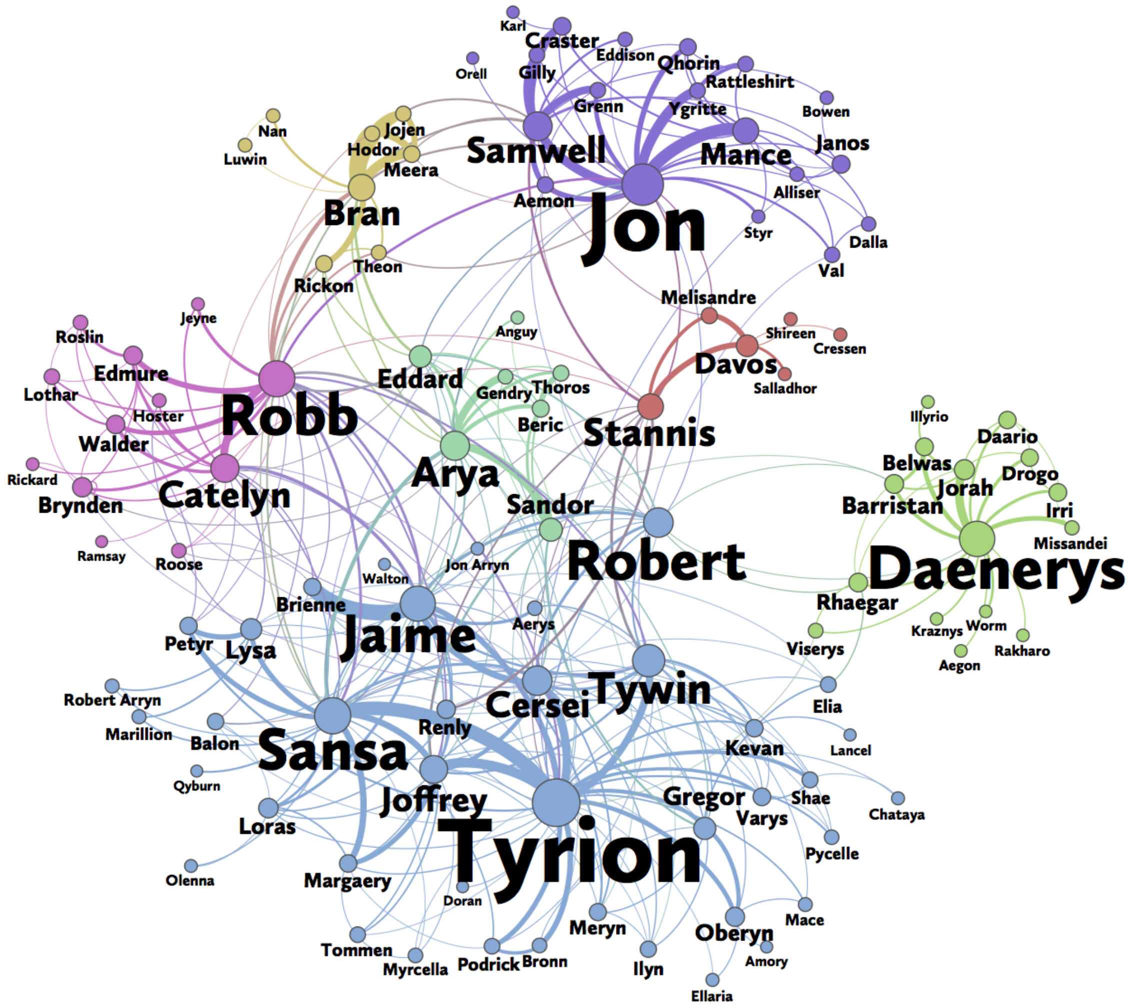


Figura 3.1: Graf Joc de Trons

les connexions entre vèrtexs: els vèrtexs d'un mòdul estaran molt relacionats entre ells però no hi haurà gaires arestes que els connectin amb els altres mòduls.

Han utilitzat mesures de centralització per representar de manera més acurada aquestes relacions. Podem veure a la gràfica de la Figura 3.2 aquestes mesures de centralització en els personatges més importants de Joc de Trons. Els números en blanc sobre cada barra mostren el rànquing dels personatges (el que té el número 1 és el que té més importància). A continuació explicarem què és cada mesura i com participa en l'anàlisi del graf.

- El *degree* és el nombre d'arestes incidents en un vèrtex i per tant ens indica el nombre de connexions amb altres personatges.
- El *weighted degree centrality* es calcula sumant el pes de cada aresta incident en un vèrtex i per tant indica el nombre d'interaccions amb altres personatges.

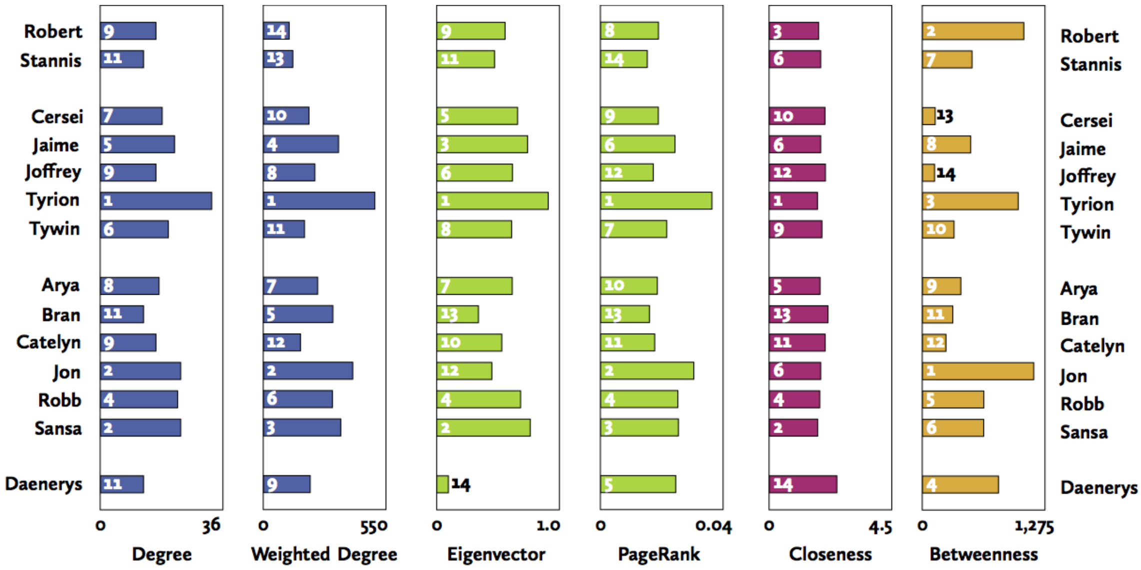


Figura 3.2: Mesures de centralització graf Joc de Trons

- El *eigenvector centrality* calcula les connexions que té un vèrtex amb nodes importants, per tant si un vèrtex té un valor elevat d'aquesta mesura, el personatge que representa estarà molt ben relacionat amb personatges importants de la sèrie.
- El *PageRank* és una mesura que va crear per primer cop Google per mostrar els documents segons la seva rellevància en fer una cerca. Tal com hem vist amb el eigenvector centrality, el PageRank també té en compte les connexions d'un personatge amb altres d'importants, però en aquest cas la importància d'un vèrtex es reparteix entre els seus veïns.
- El *closeness centrality* calcula la distància d'un dels vèrtexs a qualsevol altre node del graf. Com més petit sigui aquest nombre, més ben relacionat estarà un personatge amb tota la resta. A diferència de les altres mesures, tenir un número baix en aquesta vol dir que és un vèrtex amb més importància, ja que està "més a prop"dels altres.
- El *betweenness centrality* calcula la freqüència de camins curts per arribar a altres vèrtexs. Si un vèrtex té un número alt en aquesta mesura, ens indica que té molt bones connexions amb la resta de personatges i que molta de la informació (les trames) passa per ell.

Gràcies a totes aquestes mesures, es pot crear aquest graf tant complex i treure conclusions. Finalment, aquests investigadors arriben a la conclusió que hi ha tres personatges que destaquen en tota aquesta xarxa: Tyrion Lannister és el primer en totes les mesures de centralització calculades excepte en una, com podem veure en el graf, el seu vèrtex és molt gran, té moltes connexions, i està relacionat amb molts altres personatges. Per tant Tyrion Lannister podria considerar-se el protagonista de la sèrie. Seguidament, tenim Jon Snow i Sansa Stark, podem veure també en les mesures de centralització com són personatges que tenen molta importància i que tenen relacions amb molts altres vèrtexs.

Un cop vista la sèrie completa, trobem a faltar algunes relacions importants de la sèrie com ho seria la de la Daenerys i el Jon. Això és així ja que aquest estudi es va fer sobre el tercer llibre de la saga i per tant no té en compte les relacions noves de les últimes temporades.

3.2 Els grafs i la final del mundial de futbol

Javier Lopez Peña i Hugo Touchette de la universitat Queen Mary de Londres, van utilitzar la Teoria de Grafs per estudiar l'estructura dels dos equips que van jugar la final de futbol de Sud Àfrica l'any 2010: Espanya i Holanda [LT12].

En els grafs que representen aquests equips, els vèrtexs són els diferents jugadors i les fletxes que els uneixen (arcs), tenen pes i representen el número de vegades que s'ha fet una passada entre ells. En aquest cas, el pes dels arcs també va lligat al seu gruix, com més gran sigui el nombre de passades d'un jugador a un altre, més gruixuda serà la fletxa que ho representi (de la mateixa manera que hem vist abans en el cas de les relacions entre els personatges de Joc de Trons). La situació dels vèrtexs ve donada per la posició de cada jugador en el camp. Com veiem, en la representació tenim vèrtexs i arcs, per tant estem parlant d'un digraf (graf dirigit). (veure Figura 3.3) En el digraf podem veure els jugadors que intervenen més en el joc, les àrees per les quals es mou més la pilota, les estratègies de joc que té l'equip... Per analitzar el paper que té un jugador en l'equip, també han utilitzat alguns paràmetres dels que hem vist en l'exemple anterior:

- Amb el *closeness centrality* han calculat com de fàcil és de passar la pilota a un jugador de l'equip. Si un vèrtex te un número elevat en aquesta mesura, el jugador al que representi estarà molt connectat amb l'equip.

- Utilitzen el *betweenness centrality* per mesurar la importància d'un jugador en jugades que involucren altres jugadors de l'equip i veure com és de necessari perquè la pilota es desplaci d'un jugador a un altre. Si en un equip el valor d'aquest paràmetre és baix i no varia gaire entre els diferents jugadors, l'equip té una estratègia de passades molt equilibrada entre els jugadors i no depenen de dos o tres que són molt importants.

- Amb el *PageRank* mesuren la popularitat d'un jugador en funció de com de freqüentment li passen la pilota jugadors populars de l'equip.

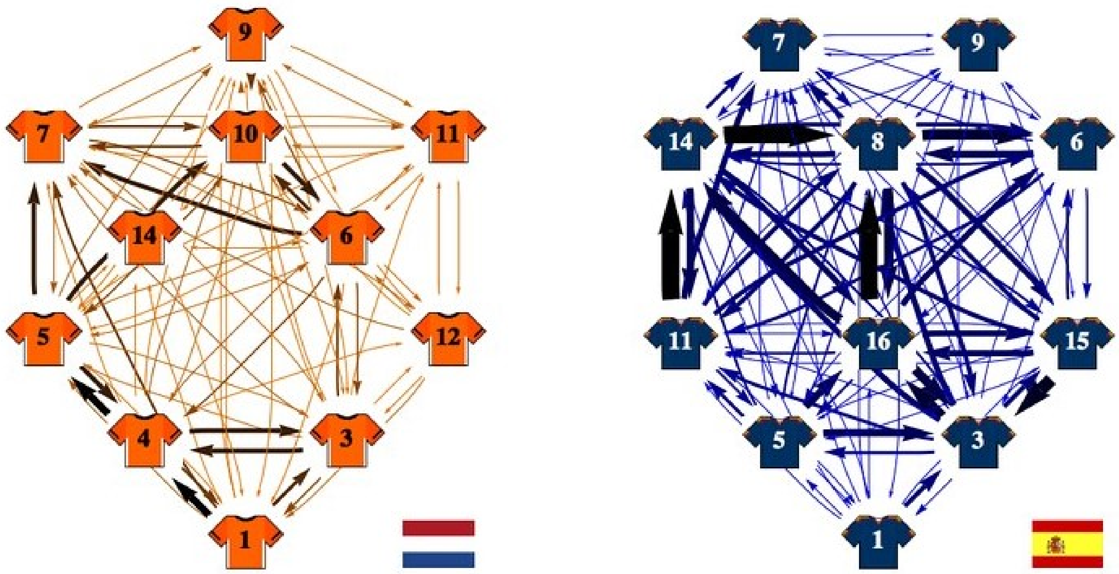


Figura 3.3: Graf equips de futbol

- A més a més, utilitzen una altra mesura que no hem vist encara, el *clustering*, que mesura com els jugadors tendeixen a formar agrupacions o a passar-se la pilota més freqüentment entre un determinat subgrup.

Els investigadors, per comparar els equips d'Espanya i Holanda van crear unes taules on hi ha recollida tota la informació dels paràmetres calculats (Figura 3.4). A

Player	C_i	$C_B(i)$	x_i	c_i^w
Casillas	16.52	0.00	3.29	20.46
Pique	17.32	**3.92**	11.46	30.70
Puyol	16.32	2.86	7.92	27.12
Iniesta	14.60	0.50	8.54	31.03
Villa	8.68	0.50	5.89	23.96
Xavi	**18.28**	1.19	**14.66**	**46.47**
Capdevila	16.54	**6.12**	10.56	29.91
Alonso	17.11	1.19	12.31	**41.69**
Ramos	16.45	2.41	9.02	27.05
Busquets	**18.55**	2.41	**12.99**	35.32
Pedro	3.42	0.00	3.35	16.75

Player	C_i	$C_B(i)$	x_i	c_i^w
Stekelenburg	**16.34**	0.32	7.63	28.35
Van Der Wiel	14.43	**2.97**	9.79	31.39
Heitinga	16.23	2.67	**11.06**	31.34
Mathijsen	**17.30**	1.30	10.84	33.22
V. Bronckhorst	15.74	1.12	10.07	**37.00**
Van Bommel	12.46	**3.08**	**11.19**	32.36
Kuyt	7.97	1.67	9.02	27.06
De Jong	10.95	2.73	9.28	28.36
Van Persie	6.89	2.92	5.88	20.13
Sneijder	10.91	2.17	10.32	**33.77**
Robben	5.91	0.16	4.91	23.91

Figura 3.4: Taula de mesures de centralització: la de l'esquerra correspon a l'equip d'Espanya i la de la dreta al d'Holanda. C_i: closeness, $C_B(i)$: betweenness, x_i: PageRank, c_i^w: clustering.

partir de tots aquests càlculs, van treure conclusions de tots dos equips.

En el cas de l'equip d'Espanya, els valors de *betweenness* són bastant baixos, per tant els passes que es fan entre els jugadors de l'equip estan ben distribuïts entre tots ells. Els valors de *clustering* són elevats, indicant que els jugadors estan molt connectats i que diferents jugadors tenen moltes opcions de passe.

En el cas dels jugadors d'Holanda, els valors de la taula no varien gaire si els comparem amb els d'Espanya, però podem veure algunes diferències significatives. Podem veure una clara diferència en el digraf que representa els jugadors i les seves passades (Figura 3.3), i veiem que els jugadors d'Holanda fan moltes menys passades que els d'Espanya. El digraf dels jugadors d'Espanya és molt més dens, té més arcs, i amb més pes; a més a més veiem que tenen un joc distribuït per tot el camp, en canvi en el cas d'Holanda solen jugar més per la part esquerra. Mirant els valors de *clustering* d'Holanda, veiem que els jugadors no estan tan connectats entre ells; i pel que fa al *PageRank*, els seus valors estan més igualats en els jugadors i per tant no n'hi ha cap que tingui molt protagonisme a l'hora de fer passades als altres.

Javier Lopez Peña i Hugo Touchette conclouen que el joc d'Holanda és ofensiu i ràpid, amb poques passades entre jugadors, mentre que el d'Espanya és més lent, amb passades ràpides on intervenen molts jugadors. Dies abans, van predir que la victòria de la final del mundial de futbol seria per Espanya, com així va ser.

CAPÍTOL 4

Els grafs a l'aula i a les xarxes socials

En els anteriors capítols s'han presentat les principals característiques de la Teoria de Grafs i algunes de les seves aplicacions en situacions reals. En aquest treball, utilitzem els grafs com un model matemàtic que ens permeti representar les relacions entre un grup d'alumnes i extreure'n conclusions. Així doncs, aquest capítol recull el desenvolupament de la part experimental del treball, en què s'estudien les relacions tant per Instagram com personals, dels alumnes de 1r de Batxillerat de l'institut Ronda. En aquest capítol veurem la gran quantitat d'informació que podem extreure a partir d'un conjunt de dades organitzades en forma de xarxa, i com d'útils són els grafs quan treballem amb tantes dades. Les metodologies i eines que s'han utilitzat també es poden aplicar per analitzar les relacions en altres grups socials.

En primer lloc veurem els objectius del treball de camp i plantejarem quines són les preguntes que es volen respondre. Tot seguit, s'explicarà i es donaran els detalls sobre el plantejament i desenvolupament de la part experimental, es descriuran les eines que s'han utilitzat per recollir les dades i analitzar-les així com els grafs que s'han estudiat. Després veurem l'anàlisi i tractament de cada graf, i finalment es presentaran els resultats d'aquesta part experimental i les conclusions que podem extreure'n.

4.1 Objectius del treball experimental

Com ja hem comentat, aquest treball ens permetrà veure quin tipus de relació tenen els alumnes de 1r de batxillerat de l'institut Ronda. Podrem comparar les relacions personals entre ells, amb les relacions que tenen per Instagram, i detectar de quin tipus són les relacions que tenen per les xarxes socials: molt propera, més aviat llunyana, lideratges... A partir d'aquest estudi també podrem analitzar les relacions personals entre els alumnes de cadascuna de les tres classes del curs i estudiar aspectes com el nivell de cohesió de cada classe, en comparació amb les altres classes. Algunes qüestions que podrem respondre a partir d'aquest treball experimental són:

- Qui podria ser un bon delegat/conciliador de cada classe, o un bon representant del curs?
- Es poden detectar grups d'amics?
- Es poden detectar situacions de persones no integrades que puguin requerir l'atenció del tutor?
- Té influència el gènere en la definició dels grups d'amics?
- Qui és popular a les xarxes socials ho és també a l'institut? I a l'inrevés?
- Amb quin nivell d'intensitat els alumnes utilitzen Instagram?
- Una eina que facilités aquest tipus de dades als tutors de cada classe podria ajudar a garantir una millor convivència del grup classe i a detectar casos de falta d'integració al grup?

4.2 Desenvolupament de l'experimentació

Per poder respondre les qüestions anteriors i analitzar les dades de manera efectiva i visual, s'han creat diferents grafs. Cada graf aportarà un tipus d'informació diferent, que permetrà estudiar determinats aspectes.

Extracció de dades

Per poder crear cada graf, en primer lloc s'han hagut d'extreure dades d'Instagram i també de les relacions que tenen els alumnes entre ells.

Instagram intenta protegir les dades que té sobre els seus usuaris i no posa a la disposició del públic aquest tipus d'informació de forma ràpida i fàcil. A més a més, en intentar buscar moltes vegades els seguidors d'algú, bloqueja aquesta acció ja que ho considera un comportament robòtic. Extreure les dades d'Instagram és realment costós, i per això es va haver de fer de manera molt manual. Finalment, buscant persona per persona els seguidors de cada alumne del curs, es va aconseguir recollir totes les dades necessàries i es va crear una matriu de dades, on les files i columnes representen cada alumne, i una casella conté el valor 1 si l'alumne de la fila corresponent, segueix a l'alumne que representa aquella columna (veure la Figura B.1 de l'Apèndix B).

D'altra banda, per tenir informació sobre les relacions personals entre els alumnes del curs, es va haver de passar una enquesta a tots ells. Aquesta enquesta es va fer amb Google Forms, i els seu objectiu era que cada alumne marqués el tipus de relació que té amb els altres (de grau 4, 3, 2, o 1), segons els criteris següents, que estaven descrits al propi formulari:

- Relació de grau 4: "Teniu una relació d'amistat molt forta. Pots confiar en aquesta persona, parleu molt sovint, li pots explicar els teus problemes o secrets, quedeu normalment, potser has anat alguna vegada a casa seva o heu sopat junts... Marqueu relació de grau 4 només a les persones del vostre cercle d'amics més íntim."

- Relació de grau 3: "Teniu una relació mitjana. Us envieu missatges de tant en tant, parleu a l'institut, potser heu quedat alguna vegada..."

- Relació de grau 2: "Relació distant. No teniu relació amb aquesta persona però la veieu per l'institut i parleu de tant en tant."

- Relació de grau 1: "No teniu relació. No heu parlat gairebé mai i no heu tractat aquesta persona."

Cada tipus de relació serà útil per analitzar aspectes diferents, per exemple, les relacions de grau 4 permetran detectar grups d'amics íntims, i les persones que tinguin més relacions de grau 1 no estaran tant integrades al grup. Tots els alumnes van participar a l'enquesta i per tant ha estat possible crear els grafs en qüestió. Tenir un 100% de participació fa que l'estudi no sigui una estimació sinó que reflecteixi la realitat de forma fidel. Les preguntes que es feien a l'enquesta no han estat comprometedores, perquè no consistien en donar una opinió pròpia sobre els altres sinó que en quantificar de forma objectiva el seu nivell de relació. Podem veure l'enquesta en la Figura A.1, a l'Apèndix A.

A partir de l'enquesta, es van extreure les dades en forma de full d'Excel i es va construir una matriu. En aquesta, en comptes d'haver-hi 1 i 0 per detectar si hi ha relació o no entre dues persones, hi havia les etiquetes 1, 2, 3 o 4 a cada cel · la, per tant les relacions entre dues persones han passat a tenir pes. El número 4 indicarà una relació molt forta (i per tant de més pes), mentre que 1 implicarà una relació molt llunyana (i per tant de menys pes). Podem veure la matriu de les relacions personals de les persones del curs a la Figura B.2 de l'Apèndix B.

Totes les dades que s'han gestionat i utilitzat en aquest treball s'han tractat de forma confidencial i anònima i aquestes dades personals no es faran públiques. A cada alumne se li ha assignat un número, que l'identificarà quan es faci l'anàlisi dels grafs.

Grafs a estudiar

Un cop extretes totes les dades, s'han generat els grafs que es volen estudiar. Com hem vist ens els capítols anteriors, un graf està format per un conjunt de vèrtexs i un conjunt d'arcs. Els grafs que s'han estudiat són grafs dirigits (digrafs), on els vèrtexs representen els alumnes de l'institut, i els arcs representen les seves relacions. Observem que són digrafs ja que pot ser que un alumne consideri la seva relació amb un altre com de pes 3, però en sentit contrari sigui de pes 4. Definirem ara els grafs que s'estudiaran i analitzaran a la Secció 4.3.

- Graf G_I: Aquest és el graf que representa les relacions per Instagram. Cada vèrtex representa els alumnes que són usuaris d'Instagram. Si considerem dos vèrtexs u i v, hi haurà un arc de u a v si u segueix a v per Instagram.
- Graf G_4: Aquest és el graf de les relacions personals de grau 4. Els vèrtexs són tots els alumnes del curs, i hi haurà un arc de u a v si u considera que té una relació de pes 4 amb v.
- Graf $G_{3,4}$: Graf de les relacions personals de grau 3 i 4. En aquest graf els vèrtexs són totes les persones del curs, i es tenen en compte només els arcs que tenen pes 3 i 4.
- Graf $G_{2,3,4}$: Graf de les relacions personals de grau 2, 3 i 4. En aquest graf els vèrtexs són totes les persones del curs, i es tenen en compte només els arcs que tenen pes 2, 3 i 4.
- Graf $G_{1,2,3,4}$: Graf de les relacions personals de grau 1, 2, 3 i 4. En aquest graf els vèrtexs són totes les persones del curs, i es tenen en compte només els arcs que tenen pes 2, 3 i 4.
- Graf G_A: Graf de les relacions personals entre alumnes de la classe A.
- Graf G_B: Graf de les relacions personals entre alumnes de la classe B.
- Graf G_C: Graf de les relacions personals entre alumnes de la classe C.

Notem que tant el grafs G_A, G_B, G_C com els grafs $G_{2,3,4}$, $G_{3,4}$ i G_4, són de fet subgrafs del graf complet $G_{1,2,3,4}$.

Eina de tractament de grafs: Gephi

Abans de veure l'anàlisi i tractament dels grafs, farem una petita explicació de l'eina de tractament de grafs que s'ha utilitzat per estudiar-los: Gephi. A l'Apèndix B s'explicarà amb més detall el funcionament d'aquesta eina i hi trobarem també captures de pantalla on es veurà com fer-ne ús. S'ha elaborat també un vídeo explicatiu amb les principals funcionalitats de l'eina, que es pot visualitzar mitjançant el QR de la Figura B.4 que trobem a l'Apèndex B.

Gephi és una eina *open-source* escrita amb Java destinada a visualitzar i analitzar xarxes i grafs. Permet manipular l'estructura d'aquestes xarxes, detectar comportaments de les dades a estudiar, explorar, analitzar, i filtrar els grafs, per poder fer hipòtesis i treure conclusions a partir de dades organitzades en forma de xarxa. Té implementats els algorismes més coneguts per l'anàlisi de diferents paràmetres d'un graf.

Quan entrem a Gephi, veiem tres finestres. En la primera (*Overview*), es pot visualitzar la representació de les dades en forma de graf, canviar el color i mida dels nodes, manipular el disseny i estructura del graf, explorar-ne els paràmetres, aplicar-hi filtres i calcular estadístiques. La segona pestanya (*Data Laboratory*), conté les dades del graf, es poden veure els nodes i arestes que hi ha, resultats de les estadístiques, el pes de cada aresta o node... I la tercera pestanya (*Preview*), que només s'utilitza un cop estudiat el graf, serveix per acabar de manipular el disseny final del graf abans d'exportar-lo. Es poden modificar paràmetres com per exemple la curvatura dels arcs, l'opacitat dels nodes, el color, si es vol mostrar o no l'etiqueta de cada node...

Per poder generar els grafs, cal primer importar les dades recollides. Això es pot fer de diverses maneres. Per fer aquest treball, el més fàcil ha estat importar les dades en forma de matriu, en format *csv* (valors separats per comes), que és un format que Gephi accepta. Un cop importada la matriu, Gephi genera automàticament una llista de nodes i arcs (que podem veure a la pestanya de *Data Laboratory*), i en la pestanya *Overview* ja es pot veure la representació de les dades en forma de graf.

Al principi veiem el graf tal com Gephi el genera per defecte, els nodes i arcs es posicionen de manera aleatòria i encara no es pot apreciar bé l'estructura del graf. Per tenir un graf que permeti extreure informació de manera més clara, cal primer tractar la visualització d'aquest. Per fer-ho, s'ha utilitzat un tutorial de manipulació de grafs [Gep], que és molt útil per iniciar-se amb Gephi i fa explicacions molt aclaridores de com funciona l'eina. Així doncs, per cada graf, des de la pestanya *Overview* s'ha modificat el color i mida dels nodes segons determinats paràmetres, s'ha utilitzat el layout *Force Atlas* per atraure els nodes més relacionats i separar els que tenen menys relació entre ells, s'han aplicat filtres per veure només els arcs que desitgem... Un cop treballats els grafs, Gephi també permet exportar-los com a imatges. Veurem les imatges dels grafs utilitzats en aquesta part experimental del treball a la següent secció, quan fem l'anàlisi de cada graf.

4.3 Anàlisi i tractament dels grafs

En aquesta secció veurem l'anàlisi de cada graf. La informació que es pugui treure respondrà preguntes com les que hem vist anteriorment, i permetran arribar a conclusions.

Grafs de les relacions personals

Els grafs de les relacions personals dels alumnes del curs són aquells que s'han obtingut a partir de l'enquesta que van respondre. Corresponen als grafs $G_4, G_{3,4}, G_{2,3,4}$ i $G_{1,2,3,4}$, definits a l'apartat 4.2 de la secció anterior.

Començarem veient el graf G_4. Els arcs d'aquest graf representen les relacions de grau 4 entre els alumnes, per tant, relacions molt properes i d'amistat. En aquest graf podrem detectar grups d'amics i veure també casos de marginació i de gent que no forma part d'un grup d'amics. A la Figura 4.1 podem veure aquest graf.

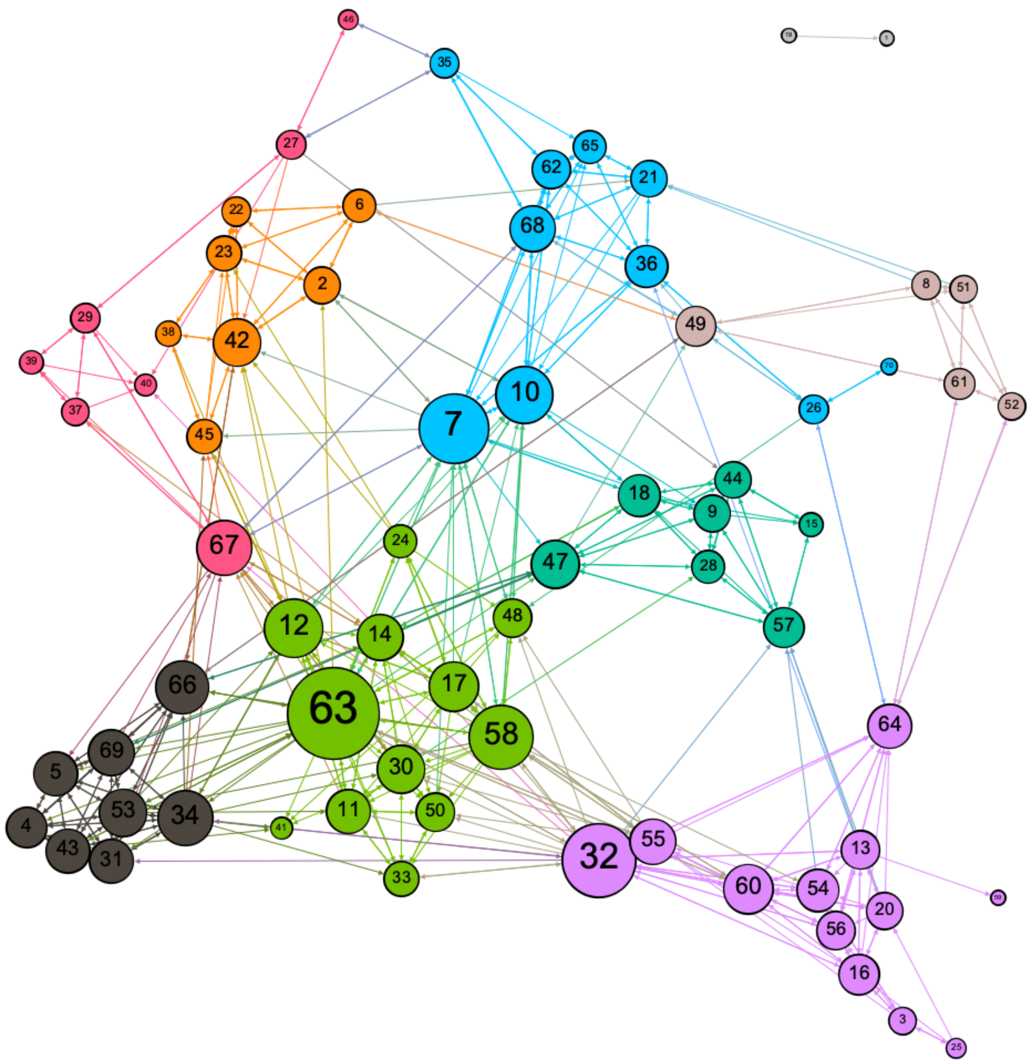


Figura 4.1: Graf G_4

Quan importem la matriu de les relacions entre alumnes a Gephi, aquest genera un graf on les posicions dels nodes és aleatòria. Per poder analitzar el graf i tenir una millor visualització, s'ha aplicat el *layout* "Force Atlas", que separa o ajunta els nodes segons els arcs que hi ha entre ells i permet una interpretació acurada i més intuïtiva del graf.

La mida dels nodes està posada segons el grau de cadascun. Els vèrtexs de les persones que tenen més relacions de grau 4 amb altres alumnes, són més grans que aquells nodes poc relacionats amb els altres. Per tant, podríem dir que els nodes més grans són els que estan més integrats en un grup d'amics, són persones que tenen moltes amistats al curs.

Observant aquest graf veiem que hi ha dues persones aïllades del grup: els nodes 19 i 1 (en color gris). Aquestes, només tenen relacions de grau 4 entre elles i per tant no estan gaire integrades als alumnes del curs i no hi tenen gaires amistats properes. Com aquestes, veiem també altres nodes que tenen només una o dues relacions d'amistat, per exemple els vèrtexs 25 i 59 (en color lila) o el 70 (en color blau). Aquests casos es veuen més apartats del graf i els vèrtexs que els representen són molt petits.

Tant sols mirant el graf, ja podem treure moltíssima informació i ens podem fer una idea general de com són les relacions dels alumnes. Però a més a més, com hem dit abans, Gephi permet fer molts càlculs i anàlisis dels grafs. Veurem alguns d'aquests càlculs i estadístiques a continuació.

Per poder detectar els grups d'amics, s'ha utilitzat una mesura anomenada *Modularity class*. Aquest paràmetre s'utilitza per mesurar la divisió d'una xarxa en grups i detectar comunitats en un graf. Els colors de cada node s'han posat en funció d'aquesta mesura, i per això podem veure com a cada grup d'amics li pertoca un color. Els alumnes del curs estan dividits en 9 grups d'amics diferents, que veiem representats al graf en diferents colors.

Al Capítol 3 hem vist algunes mesures de centralitat i com s'han utilitzat per analitzar altres xarxes. En aquest graf, gràcies als ràpids càlculs de Gephi, també s'han utilitzat algunes mesures de centralització per analitzar determinats paràmetres.

Per començar, s'han utilitzat les mesures *closeness centrality* i *betweenness centrality*. Gephi ha calculat per cada persona del curs, un valor de cadascuna d'aquestes mesures. Els nodes que tenen un valor alt de totes dues, són nodes molt ben relacionats amb els altres companys i ben connectats al grup. A la taula de la Figura 4.2 veiem el valor d'aquestes dues mesures, que corresponen a cada node. La taula té un valor per cada node, per tant és bastant llarga, a la Figura 4.2 en mostrem tant sols una part, que correspon als nodes amb els valors més alts. Els nodes 63, 7, i 32 (subratllats en blau), són els vèrtexs que tenen valors més alts en aquestes dues mesures. A més a més, aquests nodes són dels més grans del graf i per tant tenen un grau elevat. En conclusió, les persones que representen aquests vèrtexs són persones molt ben relacionades amb la gent del curs i podríem dir que serien bons candidats a ser delegats, mediadors o representants del curs. Estan molt ben integrats en el grup i serien bons mediadors per col·laborar per tal que hi hagués una millor convivència al curs.

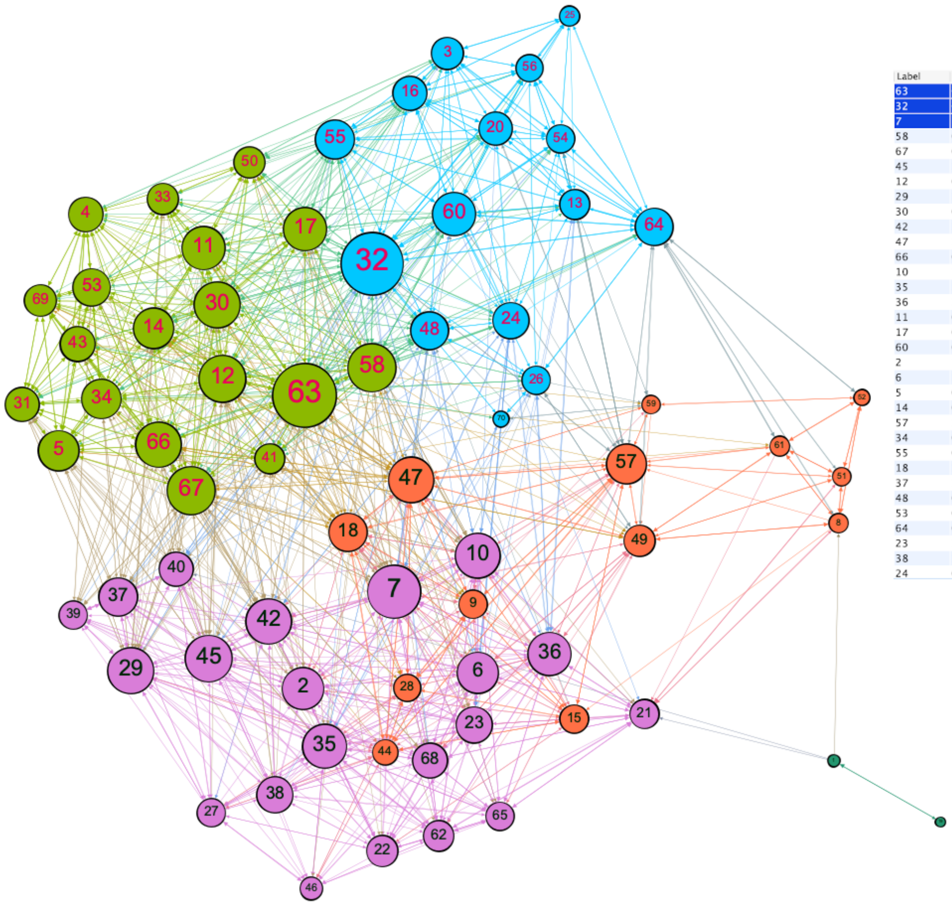
El graf G_4 ens ha donat informació sobre grups d'amics, i relacions properes entre alumnes. Si passem a mirar i analitzar el graf $G_{3,4}$, veurem relacions més estàndard, de grups de gent que es porten bé entre ells. A la Figura 4.3 tenim la imatge d'aquest graf. El graf $G_{3,4}$ s'ha tractat de la mateixa manera que el graf G_4, s'ha utilitzat el *layout* "Force atlas" i la mida dels nodes està en funció del grau d'aquests.

Label	Closeness Centrality	Betweenness Centrality
63	0.54918	650.853175
7	0.489051	572.894789
32	0.51938	544.264976
67	0.41875	477.399431
49	0.389535	386.482288
10	0.458904	320.696124
66	0.440789	310.632992
58	0.485507	291.88382
68	0.401198	280.759658
47	0.382857	274.809478
64	0.391813	255.401892
12	0.429487	219.263516
18	0.372222	212.195977
42	0.336683	187.17692
26	0.36612	175.351941
60	0.440789	160.350125
34	0.458904	156.44031
14	0.385057	140.822776
54	0.387283	136.291768
36	0.370166	131.241889
35	0.311628	124.718268
2	0.358289	117.244254
21	0.360215	113.794505
57	0.300448	104.640808
13	0.411043	102.128268
55	0.429487	101.113678
29	0.317536	92.198146
62	0.368132	84.012902
17	0.429487	80.458507
6	0.311628	78.179836
27	0.316038	77.086446
45	0.323671	70.947882
69	0.39645	69.987987

Figura 4.2: Taula amb dades de *betweenness centrality* i *closeness centrality* de G_4

En aquest cas, els colors dels nodes també s'han posat en funció de la *modularity class* i per tant, encara podem detectar grups de persones que estan més units entre ells. Aquest cop veiem que els grups passen a ser més grans, ja que no són tant íntims ni propers com els que hem vist al graf G_4A. En aquest graf tots els nodes estan integrats al grup, per tant podríem dir que és un curs on tothom té alguna persona amb qui es porta bé, i tot i que hi ha casos de poca integració, no hi ha cap persona totalment marginada del grup.

Pel que fa a les mesures de centralització de les quals també hem parlat en l'anàlisi del graf G_4, en aquest graf, segueixen essent els mateixos nodes, els que tenen valors alts en el *closeness centrality*, el *betweenness centrality*, i el grau. Per tant podem confirmar el que hem comentat abans, que serien bons representants del curs. A la



Label	Gènere	Degree	Closeness Centrality	Betweenness Centrality
63	0	78	0.807229	204.501335
32	0	76	0.728261	344.907891
7	1	63	0.632075	123.022139
58	0	56	0.712766	72.761769
67	0	56	0.609091	100.085887
45	1	54	0.626168	74.811288
12	0	54	0.587719	67.824349
29	1	53	0.62037	81.346391
30	0	53	0.603604	72.261276
42	1	52	0.577586	66.227625
47	1	52	0.632075	140.888846
66	0	52	0.609091	84.147075
10	1	51	0.603604	76.057667
35	1	50	0.626168	160.780232
36	1	49	0.632075	95.624507
11	0	49	0.626168	38.336787
17	0	49	0.598214	56.310483
60	0	49	0.650485	96.233521
2	1	47	0.577586	51.721279
6	1	46	0.598214	68.046815
5	0	45	0.59292	35.604905
14	0	45	0.57265	39.050258
57	1	44	0.59292	181.310441
34	0	44	0.558333	51.923031
55	0	43	0.62037	43.254088
18	1	42	0.553719	47.627453
37	1	42	0.587719	40.240935
48	0	41	0.587719	46.993882
53	0	41	0.603604	26.293399
64	0	41	0.563025	189.583632
23	1	39	0.563025	43.19241
38	1	39	0.59292	29.10324
24	0	39	0.57265	43.459692

Figura 4.3: Graf $G_{3,4}$ i taula amb dades del graf

taula de la Figura 4.3 veiem els valors de les mesures d'aquest graf ordenades segons el grau, de més gran a més petit. Tornen a estar subratllats en blau els nodes 63, 7, i 32, i podem comprovar així, que són els nodes amb valors més grans d'aquestes mesures.

En aquest graf les etiquetes de cada vèrtex s'han posat en diferent color segons el gènere de cada persona. Els números en vermell representen nois, mentre que els números en negre representen noies. Resulta curiós que cap dels 5 grups calculats per la *modularity class* és mixte, hi ha dos grans grups de nois, i tres de noies. A la taula de la Figura 4.3 hi ha una columna de gènere on els 1 representen noies i els 0 representen nois. Podem comprovar que el gènere influeix molt en els grups d'amics, tot i que sí que hi ha arcs entre nois i noies al graf, els grups d'amics consolidats no són mixtes.

Per acabar amb l'anàlisi dels grafs de relacions personals, ens falta veure els grafs $G_{2,3,4}$ i $G_{1,2,3,4}$. A la Figura 4.4 veiem aquests dos grafs. De la mateixa manera que hem vist al graf $G_{3,4}$, els números de cada node són negres en el cas de les noies i vermells en el cas dels nois. El graf $G_{2,3,4}$ ja té en compte les relacions de grau 2, 3 i 4, per tant els grups que detecta la *modularity class* són més grans, i impliquen relacions més distants que aquelles que hem vist en els altres grafs analitzats fins ara. El graf $G_{1,2,3,4}$ també té en compte les relacions de grau 1, per tant els grups que detecta ja no són tan fiables com els dels altres grafs. Cal dir també que el graf $G_{1,2,3,4}$ és un graf complet. Cada node té algun tipus de relació amb qualsevol altre, bé sigui molt propera o pràcticament nul·la. Per tant tots els nodes tenen arcs que els relacionen amb tots els altres.

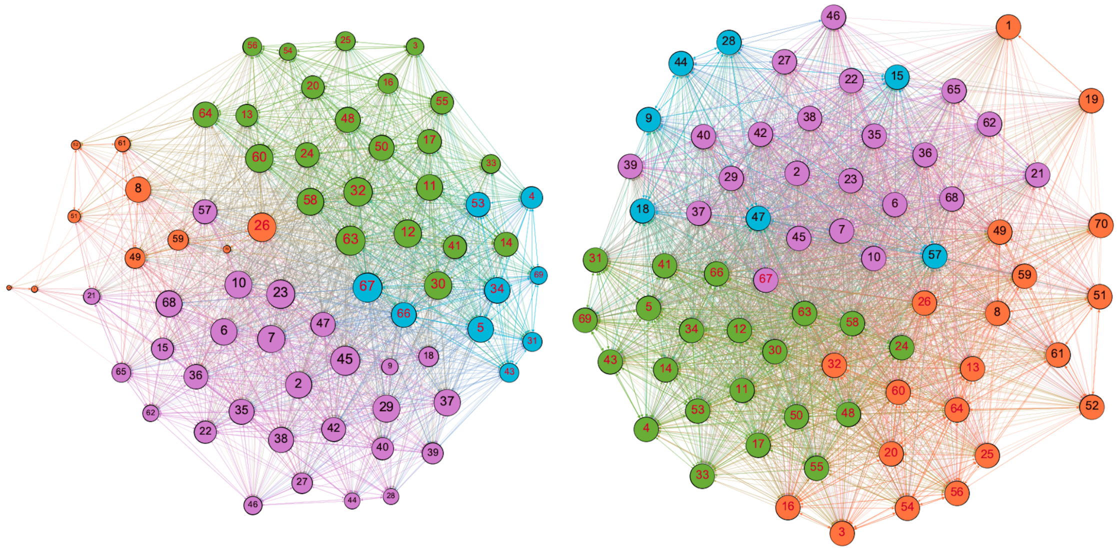


Figura 4.4: Grafs $G_{2,3,4}$ (esquerra) i $G_{1,2,3,4}$ (dreta)

Tot i que els grups que veiem als grafs de la Figura 4.4 no són gaire propers, el gènere segueix determinant molt les relacions entre els alumnes. Seguim veient com els nois tenen moltes relacions entre ells i les noies entre elles. A més a més, és curiós que els casos de menys integració social al grup es donen en les noies. Ho podem veure en els nodes taronges petits del graf $G_{2,3,4}$, que representen noies poc integrades amb els alumnes del curs. En el cas dels nois, no n'hi ha cap que estigui poc integrat; tot i que alguns més que altres, tots tenen relació amb els companys del curs.

A més a més de les mesures que s'han calculat i utilitzat per treure informació dels grafs que hem vist, se'n poden calcular moltes altres. A la taula següent veurem noves mesures que s'han calculat amb Gephi i que ens permeten comparar els grafs de les relacions personals que hem vist.

	G_4	$G_{3,4}$	$G_{2,3,4}$	$G_{1,2,3,4}$
Diàmetre	7	4	3	1
Densitat	0,102	0,269	0,62	1
Components connexes	2	1	1	1
Grau mitjà	7,043	18,543	42,8	69

Definició. El diàmetre d'un graf és la distància que hi ha entre els dos vèrtexs més allunyats del graf, en una mateixa component connexa.

En el cas del graf G_4, la màxima distància que hi ha entre dos nodes del graf, és 7. Això vol dir que com a molt s'ha de passar per 7 persones, per relacionar dues persones qualsevol del curs. Com podem veure a la taula, el diàmetre es va fent cada vegada més petit, a mesura que tenim en compte relacions més distants. Els grafs complets, com el $G_{1,2,3,4}$, tenen sempre diàmetre 1 ja que tots els nodes estan connectats i només cal un arc per passar d'un vèrtex a un altre.

Definició. La densitat d'un graf és el quocient entre el número d'arcs del graf i el número d'arcs màxim que aquest podria tenir. És a dir, mesura com d'aprop està el graf de ser un graf complet.

El graf $G_{1,2,3,4}$, que és complet, té densitat 1. Com menys relacions tenim en compte, el graf perd densitat. El graf G_4 té una densitat de només 0,102 ja que falten molts arcs per tal de completar el graf. És a dir, té aproximadament un 10% dels arcs possibles.

Definició. Els components connexos d'un graf són subgrafs connexos, de forma que dos vèrtex estan en la mateixa component connexa si existeix un camí entre ells.

El nombre de components connexes ens dona informació sobre la connectivitat d'un graf. L'únic graf inconnex que hem vist en aquesta secció és el graf G_4 que, com veiem, té 2 components connexos. Tots els altres grafs són connexos i això ens ve a dir que els alumnes del curs estan bastant relacionats entre tots. No hi ha casos de marginació total d'algun alumne o entre diferents grups d'alumnes.

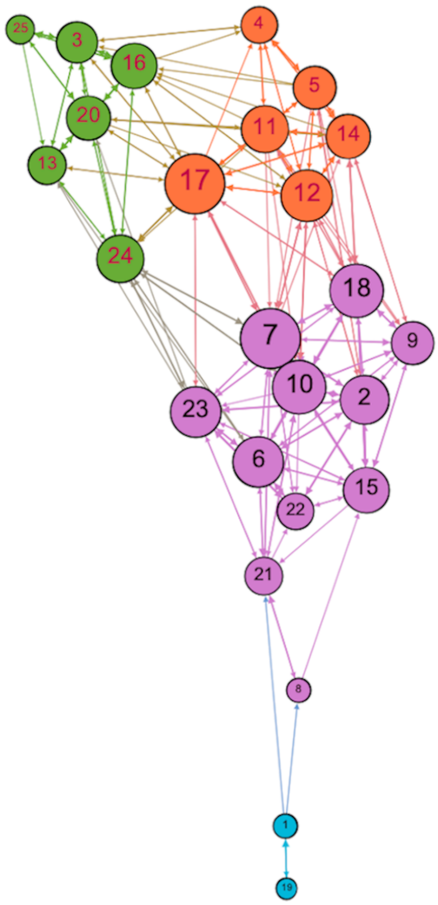
Definició. El grau mitjà d'un graf és la mitjana dels graus de cada vèrtex.

En el graf complet $G_{1,2,3,4}$, el grau mitjà és 69 ja que hi ha 70 nodes i tots tenen grau 69. El grau mitjà del graf G_4 és 7,043, per tant de mitjana els alumnes tenen 7 amics propers al curs.

Un cop vistos tots els càlculs i tots els grafs de les relacions personals dels alumnes del curs, podem concloure aquesta secció dient que és un curs on hi ha molts grups d'amics, i molt determinats pel gènere. Per norma general, no trobem grups mixtes. S'han pogut detectar també persones molt ben relacionades amb la gent del curs i que per tant podrien ser líders, representants, o mediadors del curs (els nodes 63, 7 i 32); i de la mateixa manera també es poden veure persones no tan integrades socialment, representades amb nodes molt petits en els grafs. Tenir aquests grafs a l'abast, dona molta informació sobre el tipus de relacions que tenen les persones del curs, dels grups d'amics que hi ha, lideratges i casos de marginació...

Grafs de relacions a les classes

En aquesta secció veurem els grafs de les relacions personals entre els alumnes de cada classe. Es compararan les relacions de cada classe, veurem quina està més unida, es detectaran líders de cada grup... Els grafs que s'analitzaran són els grafs G_A, G_B i G_C, que han estat definits a la Secció 4.2.



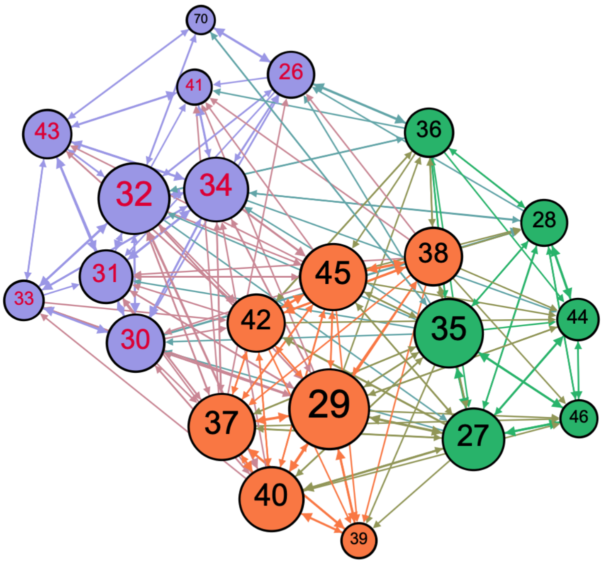
Label	Gènere	Degree	Closeness Centrality	Betweenness Centrality
17	0	27	0.709677	52.916094
7	1	27	0.6875	49.996745
10	1	23	0.666667	32.960571
18	1	23	0.628571	20.177153
12	0	22	0.647059	28.935857
23	1	21	0.666667	41.853245
6	1	21	0.628571	20.83194
2	1	20	0.611111	15.968515
11	0	19	0.666667	12.951238
24	0	19	0.611111	33.141348
15	1	18	0.564103	18.72151
16	0	18	0.536585	18.086908
20	0	17	0.55	25.422739
14	0	17	0.55	13.087816
5	0	16	0.628571	8.851186
9	1	16	0.536585	5.64111
3	0	15	0.5	10.88999
21	1	13	0.5	66.234512
13	0	13	0.478261	7.11026
22	1	12	0.488889	0.957576
4	0	12	0.478261	3.530357
25	0	7	0.385965	0.0
8	1	4	0.37931	3.733333
1	1	4	0.363636	23.0
19	1	2	0.269663	0.0

Figura 4.5: Graf G_A i taula amb dades del graf

Comencem pel graf G_A, que correspon als alumnes de la classe 1r BAT A, i que podem veure a la Figura 4.5 juntament amb una taula que conté algunes mesures calculades amb Gephi (es mostra la taula completa, ja que només té 25 files). Tant en el graf G_A com en els de les altres dues classes, s'han tingut en compte només les relacions de graus 3 i 4. Les relacions de grau 1 i 2 són relacions molt distants i l'objectiu de crear aquest graf és veure relacions properes i de bona convivència.

Veiem per colors, grups d'amistat entre els alumnes de la classe A. Aquests grups segueixen essent no mixtes. A més a més, podem detectar dos casos de poca integració en el grup classe, representats amb els nodes blaus. Veiem que és un graf on els nodes estan una mica dispersos i on hi ha bastants grups per ser una classe de només 25 persones.

Si mirem la taula de càlculs i mesures del graf, veiem que els nodes 17 i 7 (destacats en blau a la taula) són nodes que tenen els valors més alts de *Closeness* i *Betweenness centrality*, i també són els nodes més grans, per tant els que tenen grau més gran. Aquests podrien ser bons delegats de classe ja que estan molt ben relacionats amb tothom. Les etiquetes de cada node corresponen a les mateixes persones que hem vist als altres grafs, podem veure que la persona número 7, també ens ha sortit en els grafs de relacions personals del curs, com a una persona molt ben relacionada amb tothom. Per tant, és líder a classe i també al curs.

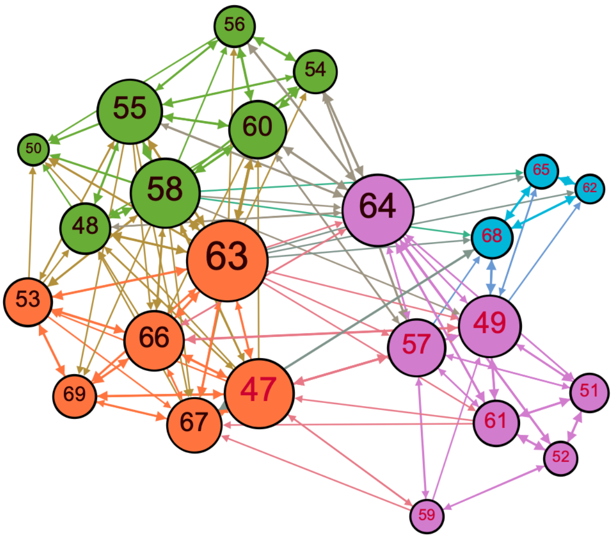


Label	Gènere	Degree	Closeness Centrality	Betweenness Centrality
29	1	31	0.84	40.921775
32	0	27	0.777778	26.880694
35	1	26	0.807692	30.282271
45	1	25	0.75	13.351537
37	1	25	0.724138	16.277453
40	1	24	0.75	12.907057
34	0	24	0.7	29.837951
27	1	23	0.7	17.317771
38	1	21	0.777778	4.962518
30	0	21	0.677419	10.374278
42	1	21	0.65625	13.225924
31	0	19	0.583333	4.440332
36	1	17	0.65625	8.906058
43	0	17	0.6	13.958272
28	1	16	0.6	9.365873
26	0	16	0.567568	7.688828
44	1	14	0.525	2.974206
33	0	13	0.6	0.803571
46	1	12	0.512195	1.281349
39	1	11	0.5	0.0
41	0	11	0.446809	1.573016
70	1	8	0.538462	2.669264

Figura 4.6: Graf G_B i taula amb dades del graf

Podem veure el graf G_B i la taula amb algunes mesures del graf, a la Figura 4.6. A diferència del graf G_A, en aquest només veiem tres grups i els nodes estan més units entre ells. No podem veure casos de marginació, i tothom està bastant integrat al grup classe. Els grups segueixen estant molt definits pel gènere, amb l'excepció del node 70, que és una noia i forma part d'un grup de nois a la classe.

Mirant les mesures de la taula veiem que la persona més relacionada amb la gent de la classe és la que li correspon el número 29. En aquest cas, aquesta persona no és líder entre els alumnes del curs però sí que ho és entre els seus companys de classe. Veiem que el node 29 té el valor més alt en totes les mesures que s'han tingut en compte.



Label	Gènere	Degree	Closeness C...	Betweenness Centr...
63	0	28	0.88	46.044841
58	0	23	0.785714	13.117063
55	0	21	0.709677	20.075397
47	1	23	0.6875	48.395238
64	0	24	0.666667	60.023016
60	0	18	0.647059	12.081349
49	1	20	0.628571	63.389286
57	1	18	0.628571	25.161508
66	0	19	0.628571	15.153175
61	1	13	0.594595	9.905159
48	0	15	0.578947	6.898016
53	0	14	0.564103	1.966667
67	0	17	0.55	24.248016
54	0	12	0.536585	1.861111
59	1	8	0.536585	5.4
69	0	12	0.536585	0.809524
56	0	11	0.511628	1.4
51	1	10	0.5	2.783333
52	1	8	0.458333	2.727778
68	1	11	0.44898	19.184524
65	1	8	0.415094	6.375
62	1	6	0.318841	0.0
50	0	7	0.0	0.0

Figura 4.7: Graf G_C i taula amb dades del graf

Pel que fa al graf G_C, el podem veure a la Figura 4.7 juntament amb la taula de mesures de Gephi. Seguim veient característiques que hem vist en els grafs de les altres classes. La separació de grups segons el gènere segueix essent evident. Per la forma que té el graf, podríem dir que és una classe on els alumnes estan més units que al graf G_A, però que potser una mica més dispersos que els del graf G_B.

Mirant els valors de la taula de mesures calculades per Gephi, detectem que hi ha un node, el 63, que és el que té el grau més elevat i valors més alts en les mesures de centralització. Aquest podria ser candidat per ser delegat del grup classe. Si tornem a mirar els grafs de les relacions personals del curs, per exemple el $G_{3,4}$, podem veure com aquest mateix node també és un node popular entre els companys del curs.

Ara que ja hem vist tots tres grafs de les relacions personals entre els alumnes de cada classe, veurem una taula on hi ha calculades altres mesures que permeten analitzar i comparar grafs.

	G_A	G_B	G_C
Avg. Path Length	1,93	1,584	1,8
Diàmetre	5	3	4
Densitat	0,338	0,457	0,342
Grau mitjà	8,12	9,59	7,52

Definició. L'*average path length* és el número mitjà de passos que s'ha de fer per passar d'un node a qualsevol altre del graf, pel camí més curt que hi ha entre ells. És a dir, ens indica de mitjana a quants passos es troben dos nodes del graf.

Com més gran és l'*average path length*, més distància hi ha entre dos nodes qualssevol del graf. Per tant, un valor alt en aquesta mesura ens indica que els alumnes del graf no estan tant units entre ells. La classe que té un valor més baix en aquesta mesura i que per tant podríem dir que és on hi ha els alumnes més relacionats entre ells, és la classe B. La classe A seria la menys cohesionada. Aquesta mesura ens confirma el que ja podem veure tan sols mirant la forma de cada graf. Com hem comentat anteriorment, el graf G_A és un graf amb una forma més allargada, on els nodes es troben més separats. En canvi el graf G_B ja té una forma més compacta, on els nodes estan més a prop.

Hem vist al final de la Secció 4.3 les definicions del diàmetre, densitat, i del grau mitjà d'un graf, que també tenim en aquesta taula. El graf que té el diàmetre més gran és el G_A, seguidament del G_C i el G_B. Un diàmetre gran indica més llunyania entre nodes i per tant, un grup d'alumnes menys unit. Els valors d'aquesta mesura reafirmen la conclusió que hem pogut treure a partir de l'*average path length*: la classe més unida és la classe de 1r de BAT B.

S'han tingut en compte només les relacions de grau 3 i 4 a l'hora de fer els grafs de cada classe. Per tant, la classe amb una densitat més alta, serà la que tingui més relacions de graus 3 i 4 entre els alumnes. La densitat més alta és la de la classe B: 0,457. Això ens indica que aproximadament un 45% de les relacions que tenen els alumnes de la classe B, són de grau 3 i 4 mentre que a les altres classes hi hauria només un 33% i un 34% de relacions properes.

El grau mitjà ens indica amb quants altres nodes té relacions de grau 3 i 4 un node qualsevol del graf, de mitjana. A la classe A, de mitjana cada alumne té relació propera amb 8 altres persones. Si una classe té un valor de grau mitjà molt elevat, això ens indicarà que els alumnes estan ben relacionats entre ells. Veiem que la classe B és la que té el valor de grau mitjà més elevat, i per tant podem tornar a reafirmar que és la classe amb els alumnes més relacionats.

Si comparem G_A amb G_C, veiem que les mesures *average path length* i densitat són lleugerament inferiors en G_C i, per tant, apunten a un major nivell de cohesió en el grup C. Malgrat això, el grau mitjà de G_A és més gran. Això significa que, individualment, el nombre de relacions de cada alumne amb els seus companys de classe és major. El diàmetre és major en G_A, això ens assenyala que hi ha persones puntuals que estan a una major separació d'alguns companys.

Per acabar d'aprofundir en l'anàlisi de les relacions personals entre els alumnes de cada classe, veurem alguns grafs que ens proporcionaran un altre tipus d'informació:

- G_{A1}: Graf on els arcs representaran només relacions de grau 1 entre els alumnes de la classe A.

- G_{B1}: Graf on els arcs representaran només relacions de grau 1 entre els alumnes de la classe B.

- G_{C1}: Graf on els arcs representaran només relacions de grau 1 entre els alumnes de la classe C.

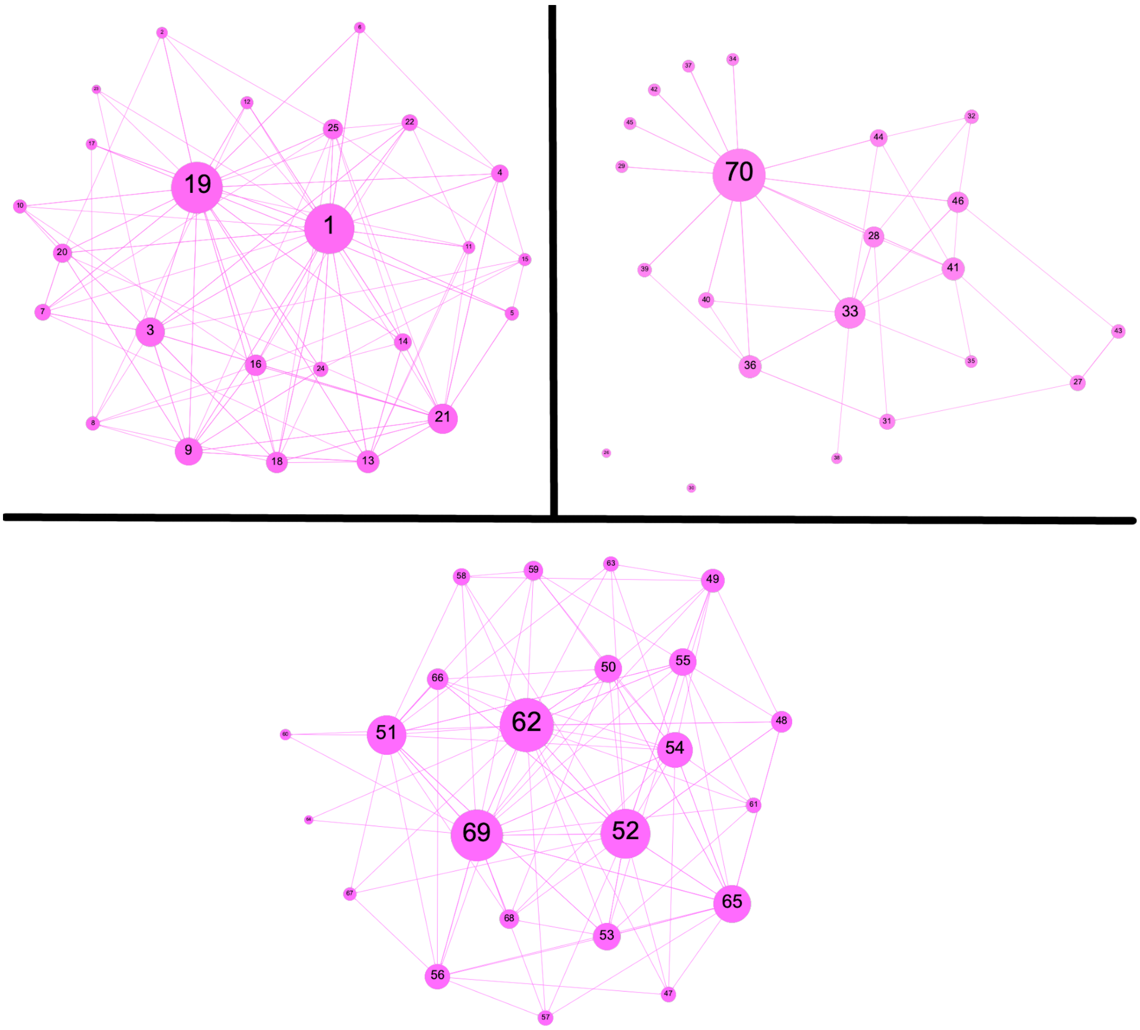


Figura 4.8: Graf G_{A1} (dalt a l'esquerra), G_{B1} (dalt a la dreta) i G_{C1} (a baix)

A la Figura 4.8 podem veure tots tres grafs. La mida dels nodes s'ha posat en funció del grau que tenen. En aquest cas, els nodes més grans ens mostraran persones que tenen relacions de grau 1 amb molts companys i que per tant no estan tan integrades al grup classe.

Pel que fa al graf G_{A1}, tots els nodes estan relacionats amb algun altre, per tant tots els alumnes de la classe tenen relació de grau 1 amb algun company. Les persones que tenen un node més gran són els vèrtexs 19 i 1. Aquests dos nodes corresponen a persones menys integrades al grup. Si mirem el graf G_A, podem veure que els nodes 19 i 1 corresponen als vèrtexs petits en blau que estan més separats dels altres. Això corrobora que aquestes persones poden estar excloses del grup classe.

El graf G_{B1}, correspon a la classe B, que hem dit que és la classe on els alumnes tenen més relació entre ells i estan més units. En aquest graf veiem dues persones que no estan relacionades amb cap altre node, per tant tenen com a mínim relacions de grau 2 amb tots els companys de classe. En general, els nodes no tenen grau elevat. Hi ha una persona que destaca per tenir moltes relacions de grau 1 amb els altres nodes: el vèrtex 70. Podríem dir que aquesta és una persona no gaire integrada al grup classe ja que té relacions distants amb una bona part dels alumnes. Si mirem grafs analitzats anteriorment, per exemple el graf de classe, G_B, o el graf de relacions de tot el curs, G_4, veiem que el node 70 també apareix poc integrat en el graf.

En el graf G_{C1} podem veure més nodes grans, per exemple el 62, 69 i 52. En aquesta classe hi ha més relacions de grau 1 que van cap a aquests nodes, i podem dir que en aquesta classe hi ha més casos de falta d'integració al grup. Com que hi ha diversos nodes grans, pot ser que es tracti d'un grup de persones que siguin amics o amigues entre ells/elles, però que no es relacionin tant amb la resta de companys de classe. S'ha de dir, però, que això no es sap del cert i que caldria mirar altres paràmetres per poder confirmar-ho.

A la següent taula veurem mesures calculades per Gephi, de cadascun d'aquests grafs, i compararem els valors per veure els comportaments de cada classe.

	G_{A1}	G_{B1}	G_{C1}
Grau mitjà	5,92	2,455	5,087
Densitat	0,247	0,117	0,231

Pel que fa al grau mitjà de cada graf, podem comprovar que la classe on cada alumne té menys relacions de grau 1 amb altres companys, és la classe B. De mitjana, cada alumne va només amb 2 persones amb qui quasi no hi té relació. Els valors d'aquesta mesura són molt més grans en el cas de les altres dues classes, on de mitjana cada persona té relació de grau 1 amb 6 altres persones (el cas de la classe A), o amb 5 altres persones (el cas de la classe C).

La densitat ens torna a portar a treure les mateixes conclusions. El graf de la classe que té una densitat més baixa, serà la classe on hi hagi menys relacions de grau 1 entre els alumnes. El valor més baix de la densitat es dona en la classe B, mentre que en la classe A i C, la densitat ja és més alta.

Per tant, havent vist tots aquest grafs, dades i mesures de cada classe de primer de batxillerat, podem afirmar que la classe més cohesionada és la classe B. Els alumnes d'aquesta classe tenen molt poques relacions distants entre ells i quasi no hi podem detectar casos de marginació. Es tracta de la classe més unida del curs.

Graf de les relacions a Instagram

Per últim, ens falta veure el graf G_I. Aquest és el graf que representa les relacions per Instagram dels alumnes del curs. En aquest cas i a diferència dels grafs que hem vist fins ara, els arcs no tenen pes ja que per Instagram no podem diferenciar graus d'amistat tant sols mirant qui segueix a qui.

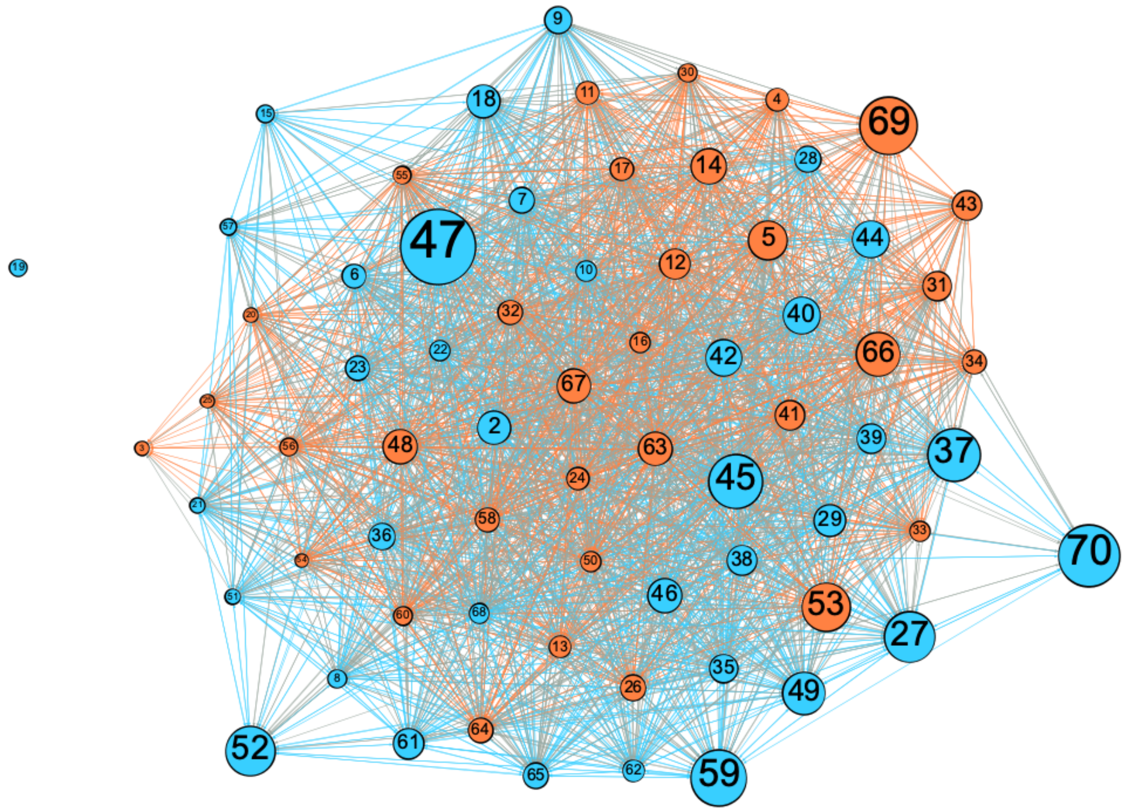


Figura 4.9: Graf de les relacions per instagram: G_I

Tenim una imatge del graf G_I a la Figura 4.9. En aquest graf els colors dels nodes no depenen de la *modularity class* ja que és difícil detectar grups d'amics tan sols mirant les relacions d'Instagram, al graf G_I hi ha moltes arestes, i molts alumnes es segueixen entre si. Ara els colors dels nodes s'han posat en funció del gènere de cada persona: el blau per les noies i el taronja pels nois. A diferència dels altres grafs de relacions personals entre alumnes del curs, en aquest graf no veiem grups de nois i noies sinó que els nodes estan barrejats i es segueixen entre ells sense dependre del gènere.

Pel que fa a la mida dels nodes, en aquest cas s'ha posat en funció dels seguidors totals de cada alumne, tenint en compte tant els seguidors que té entre la gent del curs, com els seguidors de fora de l'institut. Per fer això, a cada vèrtex se li ha assignat un pes. Aquest pes té el valor del número de seguidors totals que té cada persona per Instagram. Els nodes més grans, són els més populars per Instagram, però no implica que també siguin populars entre els alumnes del curs, com veurem després a l'estudiar el grau d'entrada de cada vèrtex.

A primer de batxillerat de l'institut Ronda hi ha 70 persones, en aquest graf hi ha 69 nodes ja que hi ha una persona que no té Instagram. A més a més, podem veure al graf com hi ha un node (amb etiqueta 19, de color blau), que està aïllat del grup. Aquesta persona no segueix a ningú del curs i tampoc hi ha ningú que la segueixi a ella.

A la Figura 4.10 tenim una part de les taules de dades del graf G_I. A la taula de la dreta veiem els nodes ordenats segons el seu pes (seguidors totals a Instagram), i a la taula de l'esquerra estan ordenats segons el seu grau d'entrada, de més gran a més petit. El grau d'entrada d'un node representa en aquest cas, els seguidors del curs que té aquest vèrtex per Instagram. Els paràmetres que es mostren a la taula són:

- Gènere: indica 0 per noi i 1 per noia.
- *Weight*: indica el nombre de seguidors totals a Instagram.
- *In-degree*: indica el grau d'entrada de cada node, és a dir, el nombre de seguidors d'Instagram entre els alumnes del curs.
- També es mostren les mesures de centralitat de cada node, *Closeness* i *Betweeness Centrality*.

Label	Gènere	weight	In-Degree	Closeness Centrality	Betweenness Centrality
32	0	442	63	0.985294	39.328544
10	1	315	63	0.893333	22.174295
7	1	480	62	0.930556	26.900771
63	0	779	62	0.905405	22.423758
2	1	767	61	0.893333	21.931892
67	0	788	61	0.881579	26.913737
47	1	2282	61	0.858974	29.336155
42	1	881	61	0.8375	20.217968
48	0	807	60	0.917808	30.628031
58	0	436	60	0.917808	25.054719
6	1	424	60	0.881579	21.528042
29	1	707	60	0.8375	18.778434
24	0	366	59	0.917808	22.872734
68	1	281	59	0.905405	24.398881
50	0	295	59	0.893333	18.781138
12	0	669	59	0.893333	18.383333
23	1	429	59	0.87013	22.072592
45	1	1505	59	0.82716	15.051761
36	1	532	58	0.848101	24.182396
39	1	620	58	0.8375	15.473052
66	0	1149	58	0.82716	9.84845
37	1	1459	58	0.817073	12.95662
17	0	391	58	0.797619	12.587174
35	1	585	57	0.87013	18.760668
46	1	799	57	0.858974	14.804865
41	0	628	57	0.788235	17.323906
49	1	1101	56	0.858974	27.778151
31	0	610	56	0.788235	15.984578
55	0	207	55	0.943662	24.199682
40	1	916	55	0.8375	20.951596
22	1	295	55	0.8375	12.717949
53	0	1313	55	0.8375	12.307921
5	0	967	55	0.817073	9.609809

Label	Gènere	weig...	In-Degree	Closeness Centrality	Betweenness Centrality
47	1	2282	61	0.858974	29.336155
70	1	1783	12	0.558333	0.500901
69	0	1631	46	0.683673	4.505503
59	1	1583	39	0.744444	15.170224
45	1	1505	59	0.82716	15.051761
37	1	1459	58	0.817073	12.95662
27	1	1393	45	0.770115	11.551982
52	1	1352	23	0.587719	2.034337
53	0	1313	55	0.8375	12.307921
66	0	1149	58	0.82716	9.84845
49	1	1101	56	0.858974	27.778151
5	0	967	55	0.817073	9.609809
40	1	916	55	0.8375	20.951596
44	1	909	49	0.752809	12.066366
42	1	881	61	0.8375	20.217968
14	0	845	54	0.77907	11.417789
48	0	807	60	0.917808	30.628031
46	1	799	57	0.858974	14.804865
67	0	788	61	0.881579	26.913737
63	0	779	62	0.905405	22.423758
2	1	767	61	0.893333	21.931892
18	1	758	54	0.858974	21.47766
29	1	707	60	0.8375	18.778434
12	0	669	59	0.893333	18.383333
61	1	663	40	0.761364	8.983282
38	1	654	54	0.858974	17.790524
41	0	628	57	0.788235	17.323906
43	0	627	38	0.663366	3.403433
39	1	620	58	0.8375	15.473052
31	0	610	56	0.788235	15.984578
35	1	585	57	0.87013	18.760668
9	1	533	45	0.752809	10.890682
36	1	532	58	0.848101	24.182396

Figura 4.10: Taules de dades del graf G_I (a la taula de la dreta els nodes estan ordenats de més gran a més petit segons el pes dels nodes, i a l'esquerra segons el seu grau d'entrada)

Per tant, les persones que es troben situades més amunt a la taula de l'esquerra, són aquelles que tenen més alumnes del curs entre els seus seguidors. A la Secció 4.3, hem conclòs que els nodes més populars a la vida real, són el 32, 63, i 7. A la taula de l'esquerra veiem destacats en blau aquests nodes. Aquestes persones són populars al curs, això fa que també siguin les més seguides per Instagram entre els alumnes de primer de batxillerat.

Si ens fixem en la posició d'aquests nodes a la taula de la dreta, veiem que cap d'ells ocupa una posició molt alta de la taula, i n'hi ha que no apareixen ja que es troben en posicions molt baixes. Els nodes 63, 32, i 7, no són molt populars en la comunitat d'Instagram, però sí que ho són entre els alumnes del curs (tant a la vida real com per les xarxes socials). Pel que fa al node 10, que ocupa la segona posició de la taula de l'esquerra, veiem que és molt popular a Instagram entre els alumnes de classe. Respecte al graf $G_{3,4}$, allí ocupa la tretzena posició, de 70 possibles, i per tant està ben valorat pels seus companys.

Ara, centrant-nos en la taula de la dreta, podem veure per ordre, els nodes més populars a la comunitat d'Instagram, és a dir, les persones que tenen més seguidors. Estan destacades en blau les tres persones més populars, que corresponen als nodes 47, 70, i 69. Si mirem el graf G_I a la Figura 4.9, veiem com els nodes amb aquestes etiquetes són els més grans del graf.

El *layout* "Force Atlas", uneix els nodes més relacionats entre ells i separa els que no ho estan tant. Per tant en el graf G_I, els nodes que estan més al centre i més a prop de tots els altres, són aquells que estan més connectats amb els altres. Els nodes que estan lluny del centre del graf, són nodes menys units al grup.

Una de les preguntes que s'ha proposat de respondre és: Qui és popular a les xarxes socials ho és també a l'institut? Bé, com hem dit abans, les persones amb més seguidors per Instagram i per tant més populars, són aquelles que tenen un node més gran en el graf. Les persones més integrades al curs són les que es troben més al centre, i curiosament, trobem molts nodes grans que estan lluny del centre del graf. El node 70, per exemple, és un dels nodes més populars en la comunitat d'Instagram, amb 1783 seguidors. En canvi al graf podem veure que és un node poc integrat. El seu grau d'entrada és 12, això vol dir que només té 12 seguidors que són alumnes del curs. A més a més, com hem vist abans al graf G_{B1}, el node 70 és el que té més relacions de grau 1 amb les persones de la seva classe. És un vèrtex poc integrat al curs, però molt popular per Instagram. Passa el mateix amb nodes com per exemple el 52, 59, o 69, entre altres. Per tant, podríem dir que ser popular a les xarxes socials no té una relació directa amb ser popular a l'institut; i de la mateixa manera, ser popular entre els alumnes del curs no implica ser popular a Instagram. Una relació que sí que hem pogut detectar, és que les persones populars a la vida real entre els alumnes, també són populars per Instagram entre ells.

A més a més, podem observar que les persones poc integrades socialment a l'institut, no tenen gaires seguidors del curs per Instagram. Un exemple d'un cas com aquest en què veiem clarament aquest comportament, és el cas del node 19. Al graf G_{A1} veiem que el node 19 té moltes relacions de grau 1 i per tant no esta ben integrat al grup classe. Al graf G_4 també podem observar que no està relacionat amb els alumnes del curs i que només té un arc amb una altra persona. Aquestes dades ens mostren que el node 19 està poc relacionat socialment. De la mateixa manera, podem veure que no té seguidors del curs per Instagram. Per tant aquí podem trobar una altra relació entre les relacions personals i les d'Instagram: les persones poc integrades als alumnes de l'institut, no estan unides amb els seus companys per les xarxes socials.

És curiós fixar-nos en que els nodes més grans del graf, és a dir, els que tenen més seguidors a les xarxes socials, són majoritàriament noies. Caldria adonar-nos també, que són també les noies les que tenen menor índex d'integració al curs.

Podem observar també, que les persones més populars per Instagram entre les persones del curs, tenen també valors alts en les mesures de centralitat que veiem a la taula. En canvi, els nodes que tenen un pes molt elevat no tenen perquè tenir un valor alt en aquestes mesures.

S'han calculat també algunes altres mesures d'aquest graf, les podem veure a la taula següent:

	G_I
Densitat	0,726
Grau mitjà	49,348
Diàmetre	2
Avg. Path Length	1,241

La densitat del graf és bastant elevada. Una densitat 1 indicaria que és un graf complet, per tant 0,726 de densitat vol dir que hi ha un 70% dels arcs totals que hi podria haver. És un graf molt dens, per tant els alumnes es segueixen molt entre ells independentment del grau d'amistat que tinguin amb un altre company. Si comparem la densitat d'aquest graf amb la de les relacions personals dels alumnes del curs, veiem que té un valor de densitat que es troba entre el del graf $G_{2,3,4}$ (que té densitat 0,62) i el del graf complet $G_{1,2,3,4}$ (amb densitat 1). Havent vist això, podem dir que les relacions per Instagram corresponen a relacions no gaire properes a la vida real. Fins i tot es segueixen els alumnes que tenen relacions de grau 1 o 2 entre ells.

Pel que fa a l'*average degree*, té un valor de 49,348. El nombre total d'alumnes del curs, és 70, i aquesta mesura ens indica que de mitjana, cadascú segueix a 49 companys de l'institut. Veiem que són molts si a més a més ho comparem amb l'*average degree* del graf $G_{3,4}$, que té un valor de 18,543. Això ens mostra que de mitjana un alumne té 18 o 19 amics al curs, però que segueix a unes 49 persones.

El diàmetre del graf és 2. Aquest és un valor molt baix, en només dos passos podem passar d'un node a qualsevol altre del graf. Té un valor de diàmetre més petit que el que tenen els grafs G_4, $G_{3,4}$ i $G_{2,3,4}$.

L'*average path length* té també un valor també molt baix. Ens indica que de mitjana els nodes es troben a una distància de tant sols 1,241.

A partir d'aquests càlculs, veiem que les relacions per Instagram són relacions no gaire properes. Els alumnes segueixen a companys seus sense tenir-hi una relació de confiança. Per aquesta raó, no podem detectar grups d'amics a partir de les dades de seguidors d'Instagram. Per veure grups hauriem de disposar de més dades, per exemple, amb qui s'envien missatges, a qui donen like o comenten les publicacions... Adonem-nos que Instagram sí que disposa de tota aquesta informació, i per tant pot identificar clarament els grups d'influència.

4.4 Resultats de l'experimentació

Ja hem vist l'anàlisi de tots els grafs. Hem vist les característiques de cadascun i els hem pogut comparar. Ara veurem quines conclusions podem treure d'aquesta part experimental a més a més de les que ja hem anat veient a mesura que hem anat analitzant els grafs.

Hem comprovat que un altíssim percentatge dels alumnes del curs fan ús de l'Instagram. Només hi ha una persona del curs que no hi tingui un perfil. Com que el nombre de persones que en tenen és tant alt, podem treure moltíssima informació de les relacions que tenen entre ells si tenim les dades de les seves relacions per Instagram. Havent fet aquesta comparació entre el graf d'Instagram G_I, i els grafs de les relacions personals entre alumnes, hem pogut detectar determinats comportaments:

- Les persones que tenen molts seguidors a Instagram no tenen perquè ser molt populars a l'institut.
- Els alumnes que no estan integrats socialment al curs, tenen pocs seguidors a Instagram. Per norma general, les persones que tenen pocs seguidors del curs per les xarxes socials, estan poc adaptades socialment als altres companys.
- Ser popular al curs no vol dir tenir molts seguidors a Instagram, però sí que implica tenir molts alumnes del curs entre els seus seguidors.

Sabent això, si tenim el graf d'Instagram i observem també les taules de dades, podem detectar ràpidament persones populars i persones no gaire integrades. Potser si hi hagués una eina que facilités aquest tipus de dades a tutors del curs, aquests podrien detectar casos de falta d'integració, marginació o bullying i actuar de la manera adequada per ajudar als alumnes poc adaptats al curs. De la mateixa manera, veurien les persones que estan més relacionades amb tothom i que podrien ajudar a millorar la convivència a la classe i al curs. És fàcil veure a partir del graf G_I, que les persones més allunyades del centre del graf i amb un grau d'entrada més baix són aquelles menys integrades, i que les que estan més centrades al graf i amb un grau d'entrada més alt són les més populars, i per tant candidats a delegats, per exemple.

El que no podem detectar tenint només les dades de seguidors entre un grup de persones per Instagram, és el grau de relació que tenen aquests. No podem detectar grups d'amistat ja que seguir a una altra persona per Instagram no implica tenir-hi una relació propera. Les relacions per les xarxes socials poden ser des de relacions de grau 1 fins a relacions de grau 4, com hem pogut comprovar en els grafs que hem vist.

Per tenir més informació sobre els tipus de relacions i veure quines persones estan més unides entre elles, caldria tenir més informació per part d'Instagram, per exemple: com de freqüentment apareix etiquetada una persona en la història o publicació d'una altra, amb qui té grups de xat, a qui posa *like* a les publicacions, de qui es guarda les publicacions, amb qui s'intercanvia missatges, de qui mira les històries o el perfil... Totes aquestes dades permetrien detectar amistats, però són més difícils d'obtenir.

Si es té la informació que s'ha obtingut a partir de l'enquesta, es té aleshores una informació molt més precisa sobre les relacions personals entre els alumnes del curs. S'ha de dir que no és una enquesta comprometedora ni invasiva, ja que no es demana la opinió sobre una altra persona sinó que tant sols s'ha de qualificar el tipus de relació que s'hi té. Passar una enquesta com aquesta a les persones del curs i organitzar les dades de forma que es pugui treure informació tal com s'ha fet en aquesta part experimental, podria ser també molt útil per les tutories de tots els cursos de l'institut ja que permetria detectar alumnes no integrats i poder-los ajudar i donar l'atenció que necessitin. La informació que donaria una enquesta com aquesta, seria més precisa que la informació que es pot treure dels seguidors d'Instagram. Fins i tot, el tutor podria utilitzar la informació dels grups d'amics per definir grups de treball, en què es barregessin persones dels diferents grups d'amics, per potenciar un major nivell de cohesió a l'aula.

Com hem pogut veure, a partir de les dades que podem obtenir sobre els seguidors per Instagram entre un col·lectiu de persones, podem treure força informació. En aquest treball, aquestes dades s'han obtingut de manera molt manual i lenta. Tanmateix, Instagram té al seu abast molta més informació de cada usuari, i disposa d'algoritmes i ordenadors molt potents, que permeten accedir a les seves dades de manera molt més ràpida i automatitzada. No som conscients de la gran quantitat de dades que oferim gratuïtament a les xarxes socials: ubicació, rutes, llocs que visitem, gent amb qui tenim amistat... Instagram té un perfil molt acurat sobre cadascun de nosaltres i de les nostres relacions personals i d'interessos, i per tant pot oferir publicitat molt més dirigida a cada usuari. Si som usuaris en alguna xarxa social, regalem més de les nostres dades de les que ens pensem. A vegades no ens adonem d'això, i cal reflexionar-hi. Aquest treball experimental és un clar exemple de com a partir de poques dades sobre un col·lectiu de persones, es pot arribar a extreure'n moltíssimes conclusions.

CAPÍTOL 5

Conclusions

L'objectiu d'aquest treball ha estat poder analitzar les relacions entre els alumnes de 1r de batxillerat de l'institut Ronda i comparar aquestes relacions amb les que tenen per les xarxes socials. Per fer aquest estudi, s'han utilitzat eines pròpies d'un camp de les matemàtiques anomenat Teoria de Grafs. Com hem vist a la primera part del treball, els grafs són models matemàtics que ens permeten representar situacions reals, de relacions entre diferents nodes. Hem vist els conceptes bàsics dels grafs, les seves característiques i alguns tipus de grafs importants. També s'han presentat alguns estudis on s'han utilitzat aquests models matemàtics per estudiar situacions més complexes, com per exemple una xarxa de personatges en una sèrie de televisió, o un equip de jugadors de futbol.

Posteriorment, hem plantejat el desenvolupament de la part experimental del treball. S'han explicat els objectius i el procediment que s'ha seguit per tal de crear els grafs a estudiar, així com les eines utilitzades per obtenir les dades i analitzar-les. El tractament dels grafs s'ha fet amb el software Gephi. S'han definit els grafs a estudiar: G_4, $G_{3,4}$, $G_{2,3,4}$, $G_{1,2,3,4}$, G_A, G_B i G_C. A més a més, s'han creat els grafs G_{A1}, G_{B1} i G_{C1}, per estudiar casos de persones poc integrades al curs, i que han complementat molt la informació extreta dels altres grafs.

A partir de mesures calculades amb Gephi s'ha pogut estudiar i comparar els grafs i les seves característiques amb més precisió. Algunes de les mesures que han estat molt útils han estat: el *Closeness centrality*, *Betweenness centrality*, la densitat, diàmetre, el grau mitjà i l'*Average path length*, entre altres.

Un cop estudiats tots els grafs, s'han comparat entre ells i s'han pogut treure les següents conclusions:

- Al curs de primer de batxillerat de l'INS Ronda, hi ha 9 grups d'amics consolidats, i el gènere té molta influència, generalment, els grups no són mixtes.

- S'han detectat persones populars i molt ben relacionades amb els companys del curs, que corresponen als nodes 63, 32, i 7. Aquests nodes podrien ser bons delegats o representants del curs.

- De les tres classes que hi ha al curs, la que està més cohesionada és la classe B. En aquesta només hi ha un cas d'una persona poc integrada, i els companys tendeixen a tenir relacions properes entre ells.
- Veiem casos de persones poc integrades a les classes: a la classe A, els nodes 19 i 1; a la classe B, el node 70; i a la classe C, els nodes 62, 69 i 52.
- Les relacions que tenen els alumnes del curs per Instagram són relacions no gaire properes, s'ha detectat que no cal tenir una relació d'amistat amb una altra persona per seguir-la per les xarxes socials.
- Les persones populars al curs, són populars també a les xarxes socials entre els alumnes.
- Tenir molts seguidors a Instagram no té una relació directa amb ser popular a l'institut.
- Les persones poc integrades socialment a l'institut, no solen tenir gaires seguidors del curs per les xarxes socials.

Com hem comentat també, si els tutors del curs disposessin d'aquestes dades, podrien tenir una visió més acurada de les relacions que hi ha entre els alumnes, i d'aquesta manera veure com es podria ajudar a integrar persones poc relacionades amb els alumnes del curs. També es podrien pensar estratègies a l'hora de fer els grups classe o grups de treball per tal de garantir que tothom es sentís a gust i que hi hagués una bona convivència al curs.

Per últim, el treball també permet reflexionar sobre la gran quantitat de dades personals que les xarxes socials tenen de cada usuari. Instagram té molta informació sobre nosaltres, els nostres interessos i les nostres relacions. Segurament no som conscients que les xarxes socials saben moltíssimes coses sobre cadascun de nosaltres, que poden utilitzar amb finalitats comercials.

APÈNDIX A

Recursos digitals

Software utilitzat

Per redactar la memòria d'aquest treball s'ha utilitzat el processador de textos LaTeX [LaT], amb l'editor on-line Overleaf [Ove]. Han estat unes eines que mai havia utilitzat abans i per tant ha requerit un temps d'aprenentatge addicional. Escriure fórmules matemàtiques amb LaTeX és més senzill i dona un millor resultat que si les escrivíssim en altres editors de textos. També genera de forma automàtica l'índex del document, de les figures i la bibliografia, i facilita les referències internes del text. L'editor Overleaf és un bon suport per a principiants en LaTeX, ja que integra el procés de compilació del text i incorpora les comandes de LaTeX. A la vegada, al ser on-line, és sempre accessible des de qualsevol ordinador i qualsevol sistema operatiu.

Quasi totes les figures que hem vist durant el treball, són de creació pròpia. Els grafs que hem vist al Capítol 2, s'han dibuixat utilitzant l'eina Lucidchart [Luc], que permet crear diagrames en línia d'una forma bastant senzilla.

Pel que fa a l'anàlisi i tractament de grafs, s'ha utilitzat l'eina Gephi [Gep]. L'Apèndix B parla exclusivament d'aquesta eina ja que ha estat molt important en la part experimental del treball i s'explicarà més detalladament.

Per passar l'enquesta als alumnes de primer de batxillerat del Ronda, s'ha utilitzat l'eina Google Forms. És una eina fàcil d'utilitzar que a més a més permet descarregar les dades obtingudes a partir de l'enquesta en forma de full de càlcul en Excel. Això ha facilitat molt la obtenció i organització d'aquestes dades. A més a més, fa que l'enquesta sigui accessible des de mòbils, ordinadors i tauletes, i per tant permet una fàcil participació. Podem veure l'enquesta a la Figura A.1, en què els noms de cada alumne han estat pixelats per preservar-ne la identitat.

Pàgines web

En la preparació d'aquest treball, s'han consultat diverses pàgines web que han servit d'ajuda per complementar el treball i són d'interès per persones que vulguin endinsar-se en la Teoria de Grafs. A continuació hi ha una recopilació d'algunes d'aquestes pàgines web.

[WM20]
Aquest és un article digital tret de la revista online "The Spinoff". Aquesta és una revista de Nova Zelanda que parla de temes actuals, política, cultura, i societat. L'article que he citat utilitza un graf per explicar la importància del distanciament social en una època de crisis sanitària com la del COVID-19. Penso que els grafs que han utilitzat representen molt bé la situació i el creixement exponencial del virus i són un molt bon exemple d'arbres, per això els he utilitzat.

[Bev] [Grib]
Per explicar els articles sobre Joc de Trons i sobre la final del mundial de futbol, m'han anat molt bé aquestes dues pàgines web, són molt entenedores i sintetitzen molt bé la informació dels articles [LT12] [BS16].

[Gria] [Gric]
Aquestes són dues pàgines web de divulgació en Teoria de Grafs que expliquen de manera molt entenedora i amena alguns conceptes importants com són els grafs hamiltonians i eulerians. Per fer aquestes explicacions, narra històries curtes i divertides que fan que s'entenguin molt bé els conceptes.

Videos i tutorials

A internet es poden trobar molts vídeos interessants sobre Teoria de Grafs. Són també un bon punt de partida per introduir-se en aquest camp. Aquí en veurem alguns dels que han resultat més útils per desenvolupar el treball.

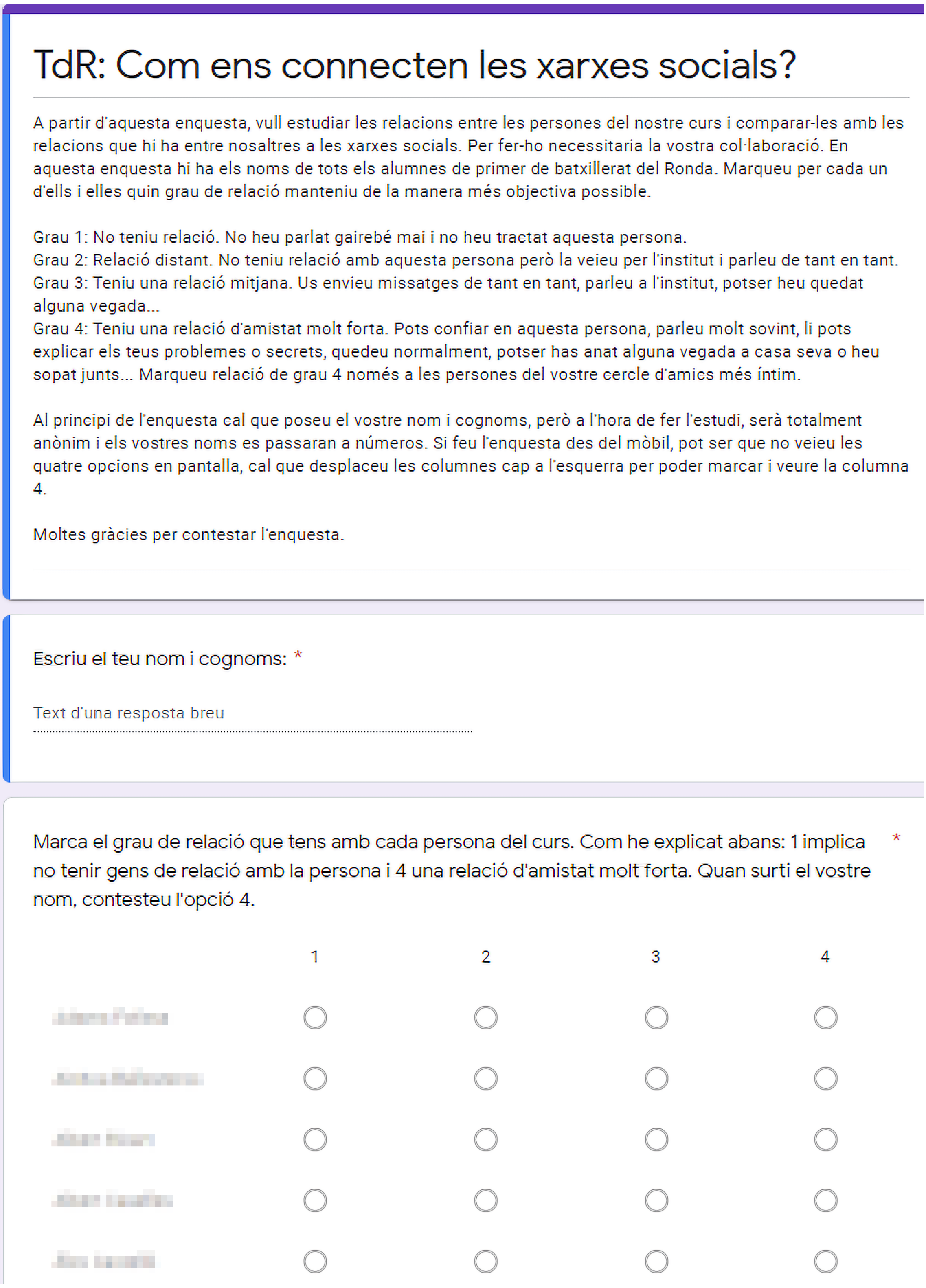
[Der] [Sav]
Aquests són dos vídeos que al començar a fer el TdR, em van ajudar molt a entendre el concepte de la teoria de grafs i em van donar una idea sobre el tema. Mostren alguns exemples i situacions que podem modelitzar utilitzant grafs, i em van donar la idea de buscar informació sobre els articles de Joc de Trons i de la final del mundial de futbol.

[Gep]
Aquest tutorial de Gephi, explica pas a pas com importar dades, tractar-les, i desar un

graf utilitzant l'eina de tractament de grafs, Gephi. Si no es coneix el funcionament d'aquesta eina, aquest tutorial comença des de zero i és fàcil de seguir.

[UPVb]
Aquest és un vídeo on s'expliquen conceptes bàsics de la teoria de grafs. Es comença des de zero i per tant es pot seguir sense tenir coneixements previs sobre el tema. És un vídeo de la Universitat Politècnica de València (UPV).

[UPVa]
Aquest també és un vídeo de la UPV. Presenta algunes situacions reals en què podem aplicar la Teoria de Grafs i ens mostra molts problemes que podem resoldre utilitzant grafs.



TdR: Com ens connecten les xarxes socials?

A partir d'aquesta enquesta, vull estudiar les relacions entre les persones del nostre curs i comparar-les amb les relacions que hi ha entre nosaltres a les xarxes socials. Per fer-ho necessitaria la vostra col·laboració. En aquesta enquesta hi ha els noms de tots els alumnes de primer de batxillerat del Ronda. Marqueu per cada un d'ells i elles quin grau de relació manteniu de la manera més objectiva possible.

Grau 1: No teniu relació. No heu parlat gairebé mai i no heu tractat aquesta persona.
Grau 2: Relació distant. No teniu relació amb aquesta persona però la veieu per l'institut i parleu de tant en tant.
Grau 3: Teniu una relació mitjana. Us envieu missatges de tant en tant, parleu a l'institut, potser heu quedat alguna vegada...
Grau 4: Teniu una relació d'amistat molt forta. Pots confiar en aquesta persona, parleu molt sovint, li pots explicar els teus problemes o secrets, quedeu normalment, potser has anat alguna vegada a casa seva o heu sopat junts... Marqueu relació de grau 4 només a les persones del vostre cercle d'amics més íntim.

Al principi de l'enquesta cal que poseu el vostre nom i cognoms, però a l'hora de fer l'estudi, serà totalment anònim i els vostres noms es passaran a números. Si feu l'enquesta des del mòbil, pot ser que no veieu les quatre opcions en pantalla, cal que desplaceu les columnes cap a l'esquerra per poder marcar i veure la columna 4.

Moltes gràcies per contestar l'enquesta.

Escriu el teu nom i cognoms: *

Text d'una resposta breu

Marca el grau de relació que tens amb cada persona del curs. Com he explicat abans: 1 implica no tenir gens de relació amb la persona i 4 una relació d'amistat molt forta. Quan surti el vostre nom, contesteu l'opció 4. *

	1	2	3	4
	○	○	○	○
	○	○	○	○
	○	○	○	○
	○	○	○	○
	○	○	○	○

Figura A.1: Enquesta pels alumnes de 1r de batxillerat del Ronda

APÈNDIX B

Gephi: Un sofware per al tractament de grafs

Al Capítol 4, hem vist per sobre el funcionament de l'eina d'edició i tractament de grafs que s'ha utilitzat per desenvolupar aquest treball: Gephi [Gep]. En aquest annex veurem altres explicacions, complementades amb altres imatges i vídeos que ens permetran entendre millor el funcionament de l'eina.

B.1 Característiques de Gephi

Gephi és un *software open-source* d'anàlisi i tractament de grafs escrit amb Java. Va ser creat per estudiants de la universitat francesa UTC (University of Technology of Compiègne), i la última versió de Gephi va sortir el desembre de 2015. Gephi s'ha utilitzat en molts projectes acadèmics importants sobre l'anàlisi de xarxes, per exemple per visualitzar la connectivitat global del contingut de *New York Times* o analitzar l'ús de Twitter.

B.2 Funcionalitats de Gephi

Gephi permet manipular, explorar, analitzar, canviar el disseny i el *layout* dels grafs, entre moltes altres accions.

Per importar les dades a Gephi, cal tenir-les en un fitxer .csv. Es pot importar el conjunt de dades en forma de matriu o bé en dos arxius: un pels nodes del graf, i un altre per les arestes. Per tal d'importar les dades de les relacions entre els alumnes i poder crear els grafs que hem vist a la part experimental del treball, es va fer en forma de matriu. A continuació tenim uns exemples d'algunes matrius de dades, que s'han utilitzat per crear grafs que hem vist en aquest treball.

La matriu de la Figura B.1 és la que conté les dades de seguidors per Instagram dels alumnes de 1r de batxillerat del Ronda. Hi podem veure una primera columna on hi ha els números que corresponen als diferents alumnes del curs, la fila de cada alumne, representa la gent a qui segueix: hi ha un 1 si segueix a una altra persona, i un 0 si no la segueix. A partir d'aquestes dades, s'ha pogut crear el graf G_I, que hem vist al Capítol 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
6	5	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
7	6	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
8	7	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
9	8	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
10	9	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
11	10	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
12	11	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
13	12	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
14	13	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
15	14	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
16	15	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
17	16	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
18	17	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
19	18	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
20	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	20	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
22	21	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
23	22	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
24	23	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
25	24	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
26	25	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
27	26	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
28	27	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1

Figura B.1: Una part de la matriu de les dades de relacions entre els alumnes per Instagram

La matriu de la Figura B.2 conté les dades de les relacions personals entre els alumnes. Veiem números que van de l'1 al 4 a cada cel·la, aquests números són els que donen pes a l'arc que hi ha entre dos nodes, és a dir, a la relació que hi ha entre dues persones. A partir d'aquestes dades s'han creat els grafs de relacions personals.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	1	0	2	1	1	1	1	2	3	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	3	1	1	1	1	1	1	1
3	2	1	0	2	2	3	4	4	2	3	4	2	3	2	2	3	2	2	3	1	2	2	4	4	2	1	1	2	1
4	3	1	2	0	3	2	2	1	1	1	1	2	2	3	2	1	4	3	1	1	3	1	1	1	3	4	2	1	1
5	4	1	2	3	0	4	1	2	2	2	2	3	3	2	3	1	2	2	2	1	2	1	1	2	2	2	1	2	1
6	5	1	3	3	4	0	2	3	2	2	2	3	3	2	4	1	3	3	3	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2
7	6	1	4	2	2	2	0	3	2	3	3	2	2	3	2	3	2	2	3	1	2	4	4	4	3	2	1	3	1
8	7	1	4	1	2	2	3	0	2	4	4	2	4	2	3	3	2	3	4	1	1	3	3	3	3	1	2	1	2
9	8	2	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	1
10	9	1	3	1	2	2	3	3	1	0	3	2	2	1	3	4	1	2	4	1	1	1	2	2	1	1	1	1	4
11	10	1	4	1	2	2	3	4	2	4	0	2	3	2	2	3	2	3	4	1	2	3	3	3	3	2	1	2	2
12	11	1	2	2	3	3	2	3	2	3	3	0	4	2	4	2	3	3	3	2	3	2	2	2	3	2	2	1	1
13	12	1	3	2	3	3	2	4	1	3	4	4	0	2	4	2	3	4	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1
14	13	1	2	3	1	2	2	1	2	1	2	1	2	0	1	2	4	3	2	1	4	1	2	2	3	2	2	2	1
15	14	1	2	2	3	3	2	2	1	3	2	4	3	1	0	2	3	4	4	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
16	15	2	3	2	2	2	3	3	2	3	3	2	2	2	2	0	2	2	3	2	2	3	3	3	2	2	1	1	3
17	16	1	2	4	3	2	2	2	1	1	1	2	3	4	2	1	0	3	1	1	4	1	1	2	3	3	1	2	1
18	17	1	2	3	3	3	2	4	1	2	4	4	4	3	4	2	3	0	3	1	3	2	2	3	4	2	2	1	1
19	18	1	3	1	2	2	3	4	1	4	4	3	3	1	4	4	2	3	0	1	2	1	2	3	2	1	1	1	4
20	19	4	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	0	1	2	2	1	1	1	1	1	1
21	20	1	1	3	2	2	2	1	2	1	1	3	3	4	3	2	4	3	2	1	0	2	2	2	3	3	2	1	1
22	21	2	2	1	1	1	3	4	3	1	4	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	0	3	3	2	1	1	1	1
23	22	1	4	1	2	2	4	3	2	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	1	2	2	0	4	2	1	1	3	1
24	23	2	4	2	2	2	4	3	2	2	2	2	2	3	2	3	2	3	3	2	3	3	4	0	3	2	2	2	2
25	24	1	2	3	2	2	3	4	2	1	4	2	2	3	2	1	3	4	1	1	3	2	2	4	0	2	1	1	1
26	25	1	2	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	1	4	2	2	1	4	2	2	2	2	0	2	2	1
27	26	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	0	2	2
28	27	1	3	1	2	1	3	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	3	2	1	1	2	0	3
29	28	1	1	1	1	1	1	2	1	4	2	1	1	1	2	3	1	1	4	1	1	1	1	2	1	1	3	3	0
30	29	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	2	3	1	3	2	1	1	2	1	2	2	2	3	2	1	2	4	2
31	30	1	2	2	3	2	2	3	1	1	2	4	4	2	4	1	2	4	3	1	3	2	2	2	3	2	3	2	4
32	31	1	2	1	4	4	1	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1
33	32	1	2	3	3	2	3	2	1	2	2	4	3	4	3	1	4	4	1	2	4	2	2	2	3	3	3	3	2
34	33	1	2	1	3	1	1	2	1	1	2	4	4	1	3	1	2	3	1	1	2	1	1	2	1	1	2	2	1

Figura B.2: Una part de la matriu de les dades de relacions personals entre alumnes

Un cop les dades estan importades a Gephi, podrem veure tres pestanyes diferents que ens proporcionaran diferents tipus d'informació: "Overview", "Data Laboratory", i "Preview".

- Al "Data Laboratory"podrem veure les dades que s'han importat. Quan es calculen mesures per cada node del graf, apareix el valor d'aquestes mesures al "Data Laboratory".

- A la pestanya "Overview"és on podem fer la visualització i tractament del graf, permet canviar el color, l'estil, el *layout*. També s'hi poden calcular mesures del graf, per exemple la densitat o el diàmetre, que són mesures que hem vist al fer l'anàlisi dels grafs. Un cop importem les dades a Gephi, a la pestanya "Overview"apareix automàticament una representació aleatòria del graf, a partir d'aquesta, podem tractar el graf perquè tingui l'aspecte desitjat.

- La pestanya "Preview"s'utilitza un cop el graf està tractat i preparat per exportar. En aquesta pestanya s'acaba de modificar el resultat final i s'exporta el graf en el format que convingui més: .png, .pdf o .svg.

A la Figura B.3, veiem una captura de pantalla de la pestanya "Overview". Si ens fixem, podem veure uns números sobre la imatge, a continuació veurem una explicació de la funcionalitat de cada part.

- 1: En aquesta secció podem modificar el color i mida dels nodes, dels arcs, i de les etiquetes d'aquests. Podem posar-ho en funció de determinades mesures, per exemple, la mida en funció del grau, o el color en funció de la *modularity class*.

- 2: Aquí podem aplicar diferents *layouts*, que modifiquen la distribució i l'estil del graf per tal de que puguem tenir una millor visualització d'aquest. Per tractar els grafs que hem vist en aquest treball, s'ha utilitzat el *layout* "Force Atlas".

- 3: Aquí veiem els nodes i arcs que són visibles en el graf, i el tipus de graf que tenim, en aquest cas, un graf dirigit.

- 4: A la pestanya *Filters*, podem aplicar filtres de manera que es mostrin o no determinats arcs o nodes segons les caràcterístiques que nosaltres vulguem. Per exemple, podem amagar els arcs que tenen pes 1, o amagar els nodes que tenen pes inferior a 10, etc.

- 5: A la pestanya *Statistics*, es poden calcular algunes mesures del graf.

- 6: En aquesta part inferior de la pantalla, podem tocar altres paràmetres, per exemple modificar el format de les etiquetes dels nodes, canviar-ne la mida, la font...

- 7: Finalment, veiem en el quadre central, la visualització del graf que tenim.

Per veure més clarament el tractament d'un graf des de zero, he fet un vídeo on es mostra pas a pas. Aquest vídeo es pot trobar en aquest *enllaç*, o al codi QR que es pot veure a la Figura B.4.

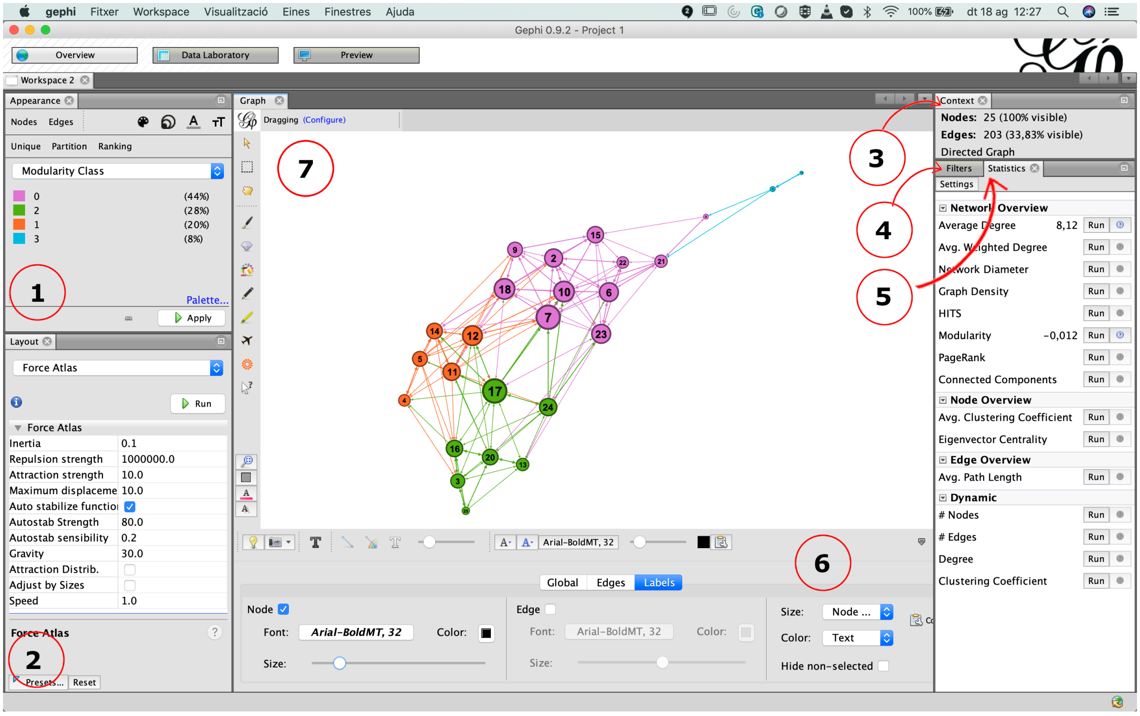


Figura B.3: Captura de pantalla de la pestanya Overview

Figura B.4: Codi QR per veure el vídeo d'explicació de tractament d'un graf

Bibliografia

Llibres i articles

[AW00] Aldous, J. i Wilson, R. *Graphs and applications: an introductory approach.* Springer, 2000.

[BS16] Beveridge, A. i Shan, J. "Network of Thrones". A: *Math Horizons* vol. 23 (abr. de 2016), pàg. 18 - 22.

[Gim+98] Gimbert, J. et al. *Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes.* Edicions de la Universitat de Lleida, 1998.

[LT12] López Peña, J. i Touchette, H. "A network theory analysis of football strategies". A: *Sports Physics: Proc. 2012 Euromech Physics of Sports Conference* (2012), pàg. 517 - 528.

[Ore95] Ore, O. *Grafos y sus aplicaciones.* DLS-EULER, Editores, 1995.

Recursos digitals

[Bev] Beveridge, A. *Network of Thrones.* URL: https://www.macalester.edu/~abeverid/thrones.html (cons. 03-05-2020).

[Der] Derivando. *¿Qué tienen que ver Andrés Iniesta, Tyrion Lannister y tus amigos de Facebook? | Teoría de grafos.* URL: https://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg (cons. 27-02-2020).

[Gep] Gephi. *Quick Start Tutorial.* URL: https://gephi.org/users/quick-start/ (cons. 15-06-2020).

[Gria] Grima, C. *7 puentes para un sólo paseo.* URL: https://mati.naukas.com/2012/04/01/7-puentes-para-un-solo-paseo/ (cons. 27-03-2020).

[Grib] Grima, C. *Fútbol y matemáticas: desmontando al pulpo Paul*. URL: https://www.lasexta.com/tecnologia-tecnoxplora/ciencia/divulgacion/futbol-matematicas-desmontando-pulpo-paul_2014042057fca1fe0cf2a2e945ba1547.html (cons. 03-05-2020).

[Gric] Grima, C. *Hamilton y el viajante*. URL: https://mati.naukas.com/2013/03/20/hamilton-y-el-viajante/ (cons. 27-03-2020).

[LaT] LaTeX. *LaTeX Tutorial*. URL: https://www.latex-tutorial.com/.

[Luc] Lucidchart. *Lucidchart software*. URL: https://www.lucidchart.com/pages/es.

[Ove] Overleaf. *Tutorials*. URL: https://es.overleaf.com/learn/latex/Tutorials.

[Sav] Savjee, S. E. .-. *Graph theory: wolf, sheep and cabbage*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=pBT-8gqhHzo (cons. 27-02-2020).

[UPVa] UPV. *Aplicaciones de la Teoría de Grafos a la vida real II | UPValenciaX on edX | Course About Video*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=R0JBjqRbRvY (cons. 10-04-2020).

[UPVb] UPV. *Conceptos básicos de la teoría de grafos | 1/42 | UPV*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=pzca71UtH-A (cons. 10-04-2020).

[WM20] Wiles, S. i Morris, T. *What does 'level two' mean – and why does it matter?* 2020. URL: https://thespinoff.co.nz/politics/22-03-2020/siouxsie-wiles-toby-morris-what-does-level-two-mean-and-why-does-it-matter/ (cons. 09-04-2020).